# Mengenlehre

Yanhai Song

songy@in.tum.de
Proseminar „Mathematische Modellierung“

Fakultät für Informatik
Technische Universität München

12.Juni.2001

Zusammenfassung

Die Mengenlehre gehört zu den vier Teilgebieten der mathematischen Logik , zusammen mit der Beweistheorie ,der Modelltheorie und der Rekursionstheorie.
Ihre Sprache ist die Prädikatenlogik erster Stufe , lediglich versehen mit der zweistelligen Relation $\in$.
Dieser Artikel erläutert Grundbegriffe von Mengen , Paare , Relationen und Funktion , natürliche Zahlen .

## §1 Grundbegriffe von Mengen

### 1.1 Definition von Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmer wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens –welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen .

### 1.2 Die Sprache der Mengenlehre

Die Sprache der Mengenlehre ist die Prädikatenlogik erster Stufe mit $\in$ als Relationssymbol .
Die Sprache besteht aus :

- logischen Zeichen $\neg$ , $\wedge$ , $\vee$ , $\rightarrow$ , $\leftrightarrow$ , $\forall$ , $\exists$
  - $\neg$ Negation
  - $\wedge$ logisches „und “ , Konjunktion
  - $\vee$ logisches „oder “ , Disjunktion
  - $\rightarrow$ Wenn … , dann …
  - $\leftrightarrow$ …genau dann , wenn …
  - $\forall$ Allquantor „für alle“
  - $\exists$ Existenzquantor „es gibt“.
- dem Gleichheitszeichen =
- dem (zweistelligen) Relationszeichen $\in$
- abzählbar vielen Variablenzeichen v0 , v1 , …
- Klammerzeichen ( , )

Für Variablen schreiben wir auch x , y , z , usw .
Primformeln der Sprache sind Ausdrücke der Form „ $x=y$ “ und „ $x\in y$ “.
Formeln der Sprache sind wie folgt induktiv definiert .

A . Jede Primformel ist eine Formel .
B . Sind $\varphi,\psi$ Formeln , so sind auch $(\neg\varphi)$ , $(\varphi \wedge \psi)$ , $(\varphi \vee \psi)$,$(\varphi \rightarrow \psi)$ , $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Formeln
C . Ist $\varphi$ eine Formel ,x eine Variable , so sind auch $\forall x\ \varphi$ und $\exists x\ \varphi$ Formeln .

### 1.3 Existenz der leeren Menge

$\exists x\ \forall y\ y \notin x$

Leere Menge ist eine Menge ohne Element und zu schreiben : $\varnothing$

### 1.4 Extensionalitäts – Axiom

$\forall x,y.\ x = y \ \leftrightarrow\ \forall z.\ z\in x \ \leftrightarrow z\in y$

*Zwei Mengen sind genau dann gleich , wenn sie die gleichen Elemente haben .*

Sind x und y zwei Mengen , so können wir zunächst die Menge bilden , die nur a enthält , und dann b hinzufügen , oder umgekehrt zuerst die Menge bilden , die nur b enthält und dann a hinzufügen . Wir erhalten das gleiche Ergebnis.
Es gilt z.B. $\{x , y\} = \{ y , x \}=\{x , x , y , x \}$.

### 1.5 Aussonderungs-Schema

$\forall x,p1,\ldots,pn\ \exists y\ \forall u.\ u\in y \ \leftrightarrow\ u \in x \wedge \varphi(u,p1 ,\ldots,pn)$

*wobei* $\varphi$ *eine Formel ist , in der die Variable y nicht vorkommen.*

*Zu jeder Eigenschaft φ und jeder Menge x gibt es eine Menge y,die genau die Elemente von x enthält , auf die φ zutrifft.*

Man schreibt $y = \{ u \in x \mid \varphi(u,p_1 ,\dots,p_n) \}$.
Das Aussonderungs-Schema besteht aus abzählbar vielen Instanzen : Ein Axiom pro Formel .
Die $p_1 ,\dots,p_n$ in einer Instanz des Schemas sind Parameter.
Vorstellung ist : Zu gegebener Formel φ und Menge x fixieren wir Parameter $p_1 ,\dots,p_n$ aus x . Dann sondern wir alle Elemente u von x aus , für die $\varphi(u,p_1 ,\dots,p_n)$ wahr ist . Diese u bilden die Menge y .
Wichtig ist die Beschränkung auf ein x bei der Aussonderung . Das volle Komprehensions-Schema , das für jedes φ die Menge *aller* u aufsammelt , für die φ(u) gilt , ist inkonsistent. Dies zeigt z.B. die Russell'sche Antinomie :
Wir wählen als φ die Formel $x \notin x$ , und bilden $y = \{x \mid x \notin x \}$ . Für alle Mengen z gilt $z\in y$ gdw φ(z) gdw $z \notin z$ . Insbesondere gilt dann für y:
$y\in y$ gdw φ(y) gdw $y\notin y$.Widerspruch!
(Die Antinomie besagt : Es gibt Mengen und echte Klassen.)

### 1.6 Kardinalzahl

Es gibt eine Menge A . n ist Anzahl von Elemente der Menge A . Man sagt , daß n Kardinalzahl der Menge A ist .
In Zeichen : card $A = |A| = n$ ,$|\varnothing| = 0$

### 1.7 endliche Menge

A ist eine Menge . Wenn es natürliche Zahl n gibt und $|A|$ = card $A = n$ ,dann A ist endliche Menge ,sonst A ist unendliche Menge .

## §2 Paare

### 2.1 ungeordnete Paar

### 2.1.1Die leere Menge ∅ ist Teilmenge beliebigen Menge.( $\varnothing \subseteq A$ für beliebigen A)

Es gibt nur eine einzige leere Menge , die Leermenge .

### 2.1.2 Paarmengen-Axiom

$\forall x,y\ \exists z\ \forall u. u\in z \leftrightarrow u=x \vee u=y$

*Zu je zwei Mengen x,y existiert eine Menge z , die genau x und y als Elemente hat .*

Man schreibt $z =\{ x , y \}$ d.h.$z = \{u \in v \mid u = x \vee u = y \}$, $x\in v$ und $y\in v$.
x und y müssen nicht verschieden sein , und es folgt für eine Menge x die Existenz von $\{x , x\}=\{ x \}$,also die Existenz der Einermenge von x.

### 2.1.3 Vereinigungsmengen-Axiom

$\forall x\ \exists y\ \forall z.\ z\in y \leftrightarrow \exists u.\ u\in x \wedge z\in u$

*Zu jeder Menge x existiert eine Menge y , deren Elemente genau die Elemente der Elemente von x sind .*

Man schreibt $y = \cup x$.
Mit Hilfe des Paarmengen-Axioms existiert auch die Vereinigung zweier Mengen , mit der Definition $x \cup y := \cup \{ x , y \}$ gilt dann
$z \in x \cup y$ gdw $z \in x$ oder $z \in y$ .
Für die Existenz von $\{ x , y , z \}$ gilt es
dann $\{ x , y , z \}= \cup \{ \{x , y \}, \{ z \} \}$.

$\cup\varnothing = \varnothing$ , $\cup\{ x \}= x$

### 2.1.4 Schnitt

Definition : Der Schnitt zweier Mengen A , B ist eine Menge , zu der die Elemente von A gehören , die zugleich Elemente von B sind , in Zeichen :
$A \cap B = \{ x\in A \mid x\in B \}$ d.h. $A \cap B = \{ x \mid x\in A \wedge x\in B \}$

### 2.1.5 Potenzmengen-Axiom

$\forall x\ \exists y\ \forall z.\ z \in y \leftrightarrow \forall u.\ u \in z \rightarrow u \in x$

*Zu jeder Menge x existiert eine Menge y , die genau die Teilmengen von x als Elemente besitzt .*

Man schreibt $y = P(x)$ .
Das Potenzmengenaxiom ist vielleicht das stärkste Axiom der Mengenlehre . Ein berühmter Satz von Cantor besagt , daß für keine Menge x eine Surjektion von x auf P(x) existiert , d.h. für jedes x ist die Potenzmenge von x echt größer als x .

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ , $P(\{a\}) = \{\varnothing,\{a\}\}$
Wenn es genau n Elemente in Menge A gibt , d.h. $|A| = n$

dann gibt es genau $2^n$ Elemente in P(A) d.h. $| P(A) | = 2^n$

## 2.2 geordnete Paar

### 2.2.1 Definition

Das geordnete Paar (x,y) ist nun definiert durch $(x,y)=\{\{x\},\{x , y\}\}$.
Es gilt dann $( x_1 , x_2 ) = ( y_1 , y_2 )$ gdw $x_1 = y_1$ , $x_2 = y_2$.
Weiter ist z.B. $( x , x ) = \{\{x\}\}$.

### 2.2.2 Cartesisches Produkt

Definition : Cartesisches Produkt zweier Mengen A und B ist eine Menge und besteht aus allen Paaren ( a , b ) ,wobei $a\in A$ und $b\in B$.Sie wird mit $A \times B$ bezeichnet : $A \times B = \{( a , b )| a\in A \wedge b\in B\}$

$\varnothing \times B = A \times \varnothing = \varnothing$ , $A \times B \neq B \times A$ , $A \times (B\cup C)=(A\times B)\cup (A\times C)$ , $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$ , $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ , $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$
(A , B und C sind drei Mengen)
Falls A und B endliche Mengen sind , $| A \times B | = | A | \cdot | B |$

# §3 Relationen und Funktion

## 3.1 Relationen

### 3.1.1 Definition

Wenn eine Menge R $\varnothing$ ist oder ihre allen Elemente geordnete Paare sind ,dann ist R eine Relation .d.h. zweistellige Relation.
Wenn geordnete Paar $( x , y) \in R$ ,dann In Zeichen : xRy
Eine zweistellige Relation R von einer Menge A nach einer Menge B ist eine Teilmenge der Produkt $A \times B$ : $R \subseteq A \times B$
Eine zweistellige Relation R in einer Menge A ist eine Teilmenge der Produkt $A \times A$ : $R \subseteq A \times A$

### 3.1.2 Eigenschaften von Relation

Relationen in einer Menge A können folgende drei hauptsächliche Eigenschaften haben :symmetrisch , reflexiv , transitiv .
Symmetrisch : Eine Relation R in A ist symmetrisch ,
wenn für alle $a , b \in A$ $aRb \rightarrow bRa$ gilt .
Reflexiv : Eine Relation R in A ist reflexiv ,
wenn für alle $a \in A$ gilt : aRa .
Transitiv : Eine Relation R in A ist transitiv ,
wenn für alle $a ,b , c \in A$ gilt : $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

Definitionsbereich von Relation R ist $domR = \{ x | \exists y \ xRy \}$.
Wertebereich von Relation R ist $ranR = \{ y | \exists x \ xRy \}$.
Bereich von Relation R ist $fldR = domR \cup ranR$ .
$dom \varnothing = ran \varnothing = \varnothing$.
Wenn $R = A \times B$ ,dann domR = A und ranR = B .
Wenn $R = A \times A$ ,dann domR = ranR = A .

Wenn F ,G beliebige Relationen sind , dann
1.Komposition von F und G ist in Zeichen $F\circ G = \{ (x ,y) | \exists z (xGz \wedge zFy) \}$
2.Inversion von F ist in Zeichen $F^{-1} = \{ (x ,y) | yFx\}$.

z.B. F und G sind Relationen in N . d.h.
$F = \{ (x ,y) | x , y \in N \wedge y = x^2 \}$
$G = \{ (x ,y) | x , y \in N \wedge y = x+1\}$
Dann $G^{-1} = \{ (y ,x) | y ,x \in N \wedge y = x+1\}$
$F\circ G = \{ (x ,y) | x ,y \in N \wedge y = (x+1)^2 \}$

$G\circ F = \{ (x ,y) | x ,y \in N \wedge y = x^2 +1 \}$

### 3.1.3 Äquivalenzrelation und Äquivalenzklassen

Anzahlen von zweistelligen Relationen in einer Menge A sind $2^{n^2}$ .
( Wegen $| A | = n$ , $| A \times A | = n^2$ , $| P(A \times A) | = 2^{n^2}$ )
In diesen Relationen sind einige Relationen wichtig .
Äquivalenzrelationen sind Relationen mit den drei Eigenschaften symmetrisch , reflexiv , transitiv .
Die kleinste Äquivalenzrelation ist $I_A = \{(x , x)| x \in A \}$ .
Die größte Äquivalenzrelation ist $E_A=\{(x , y)|x\in A \wedge y\in A\}= A \times A$ .

R ist eine Äquivalenzrelation.A ist eine Menge und $A \neq \emptyset$, $x \in A, y \in A$ .
Äquivalenzklassen ist eine Menge von alle Elemente y in A für xRy .In Zeichen
$[x]_R = \{ y | y \in A \wedge xRy \}$.
$[x] \neq \emptyset$ und $[x] \subseteq A$ .
Wenn xRy , dann $[x] = [y]$ und $\cup_{x \in A} [x] = A$ , sonst $[x] \cap [y] = \emptyset$ .
Wenn R die kleinste Äquivalenzrelation $I_A$ ist und beliebig $x \in A$ , dann $[x] = \{ x \}$.
Wenn R die größte Äquivalenzrelation $E_A$ ist und beliebig $x \in A$ , dann $[x] = A$.
A/R ist eine Menge für $A/R = \{ [x]_R | x \in A\}$

z.B. $A = \{ 1,2,\ldots,8 \}$ , $R = \{ (x,y) | x,y \in A \wedge x \equiv y \ (\bmod 3) \}$. $x \equiv y \ (\bmod 3)$ ist ,daß x-y durch drei teilbar sein kann.
R ist eine Äquivalenzrelation in A .
$[1] = [4] = [7] =\{ 1,4,7 \}$
$[2] = [5] = [8] =\{ 2,5,8 \}$
$[3] = [6] =\{ 3,6 \}$
$A/R = \{\{ 1,4,7 \}, \{ 2,5,8 \},\{ 3,6 \}\}$

## 3.1.4 Klasseneinteilung

Definition von Klasseneinteilung :
In einer Menge A sei ein System S von Teilmengen $S = \{ T_1, T_2, T_3, \ldots\}$gebildet .$S \neq \emptyset$ ist eine Klasseneinteilung von A ,wenn folgendes gilt :
a. Je zwei Elemente von S haben leeren Durchschnitt $T_i \cap T_j = \emptyset$ für $i \neq j$ .
b. Die Vereinigung aller Elemente von S ergibt A .

$$A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \ldots \cup T_n \cup T_{n+1} \cup \ldots$$

c. $T_i \neq \emptyset$ für alle i .

Jede Äquivalenzrelation in einer Menge A erzeugt eine Klasseneinteilung von A , und umgekehrt : Zu jeder Klasseneinteilung einer Menge A gibt es eine Äquivalenzrelation in A , die diese Klasseneinteilung von A erzeugt .
A/R ist eine Klasseneinteilung von A .

z.B. Wenn Menge $A = \{ a, b, c, d \}$,
dann $\{ \{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$und $\{ \{a, b, c, d\} \}$sind beide Klasseneinteilungen von A ,
$\{\{a,b\},\{c\},\{a,d\}\}$, $\{\emptyset,\{a, b\},\{c, d\}\}$und $\{\{a\}, \{b, c\}\}$sind alle keine Klasseneinteilungen von A .

# 3.2 Funktion

## 3.2.1 Definition

f ist eine zweistellige Relation . Wenn beliebige $x \in \text{dom } f$ gibt es einzige $y \in \text{ran } f$ und xfy , dann f ist eine Funktion .
A , B sind Mengen , wenn dom f = A und ran $f \subseteq B$ ,dann f ist eine Funktion von A zu B . In Zeichen $f : A \rightarrow B$ .

Menge $B^A$ ist Menge von alle Funktionen von A zu B .
In Zeichen : $B^A = \{ f | f : A \rightarrow B \}$ .
Wenn $| A | = m$ und $| B | = n$ , dann $| B^A | = n^m$ .

z.B. Wenn Menge $A = \{ 0 , 1 , 2 \}$ und Menge $B = \{ a , b \}$, dann $B^A = \{ f_1 ,f_2 , \ldots , f_8 \}$
$f_1 = \{ (0,a) ,(1,a),(2,a) \}$
$f_2 = \{ (0,a) ,(1,a),(2,b) \}$
$f_3 = \{ (0,a) ,(1,b),(2,a) \}$
$f_4 = \{ (0,a) ,(1,b),(2,b) \}$
$f_5 = \{ (0,b) ,(1,a),(2,a) \}$
$f_6 = \{ (0,b) ,(1,a),(2,b) \}$
$f_7 = \{ (0,b) ,(1,b),(2,a) \}$
$f_8 = \{ (0,b) ,(1,b),(2,b) \}$

## 3.2.2 Eigenschaften

Funktionen können folgende drei wichtige Eigenschaften haben : surjektiv , injektiv , bijektiv .
Surjektiv : Eine Funktion ist *surjektiv* , wenn zu jedem Element des Wertebereichs ein Urbild im Definitionsbereich existiert, in Zeichen: Sei $f : A \rightarrow B$ ; f ist surjektiv $\leftrightarrow \forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $f (a) = b$ .
Injektiv : Eine Funktion ist *injektiv* , wenn jedes Element des Wertebereichs höchstens ein Urbild im Definitionsbereich besitzt , in Zeichen:Sei $f :A\rightarrow B$;f ist injektiv $\leftrightarrow \forall x,y \in A \ f(x) = f(y) \rightarrow x= y$ .
Bijektiv : Eine Funktion ist *bijektiv* , wenn sie zugleich injektiv und surjektiv ist .

## 3.2.3 Komposition und Inversion

Komposition
Wenn F , G Funktionen sind , dann $F \circ G$ ist auch Funktion und gilt :
1 . $\text{dom } (F \circ G ) = \{ x| x \in \text{dom } G \wedge G(x) \in \text{dom } F \}$.
2 . für beliebige $x \in \text{dom } (F \circ G )$ gibt es $F \circ G(x) = F(G(x))$ .
Wenn $f:B\rightarrow C$ und $g:A\rightarrow B$, dann $f \circ g:A\rightarrow C$ und für beliebige $x \in A$ gibt es $f \circ g(x) = f(g(x))$ .
Wenn f und g surjektiv sind ,dann $f \circ g : A \rightarrow C$ ist auch surjektiv .
Wenn f und g injektiv sind ,dann $f \circ g : A \rightarrow C$ ist auch injektiv .
Wenn f und g bijektiv sind ,dann $f \circ g : A \rightarrow C$ ist auch bijektiv .

z.B. Wenn f , g , h $\in R^R$ und f(x) = x+3 , g(x) = 2x+1 , h(x) = x/2 .
$f \circ g(x) = f(g(x)) = (2x+1) +3 = 2x + 4$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(x+3)+1 = 2x+7$
$f \circ f(x) = f(f(x)) = (x+3)+3 = x+6$
$f \circ h \circ g(x) = f(h(g(x))) = (2x+1)/2 +3 = x + 3.5$

Inversion
Wenn $f : A \to B$ bijektiv ist , dann $f^{-1}$ ist auch eine Funktion und $f^{-1} : B \to A$ ist bijektiv .
$f^{-1} : B \to A$ ist inverse Funktion von $f : A \to B$ . $f : A \to B$ ist auch inverse Funktion von
$f^{-1} : B \to A$

# §4 natürliche Zahlen

## 4.1 Unendlichkeits-Axiom

$\exists x.\ \exists y\ y \in x \wedge \forall y.\ y \in x \ \to\ \exists z.\ y \in z \wedge z \in x$

*Es existiert eine unendliche Menge .*

Ein Beispiel ist x = {a,{a},{{a}},{{{a}}},…}, für eine beliebige Menge a .
Es gibt eine Menge , die die Zahl 0 enthält und mit jedem ihrer Elemente auch dessen Nachfolger .
Nachfolger von x ist in Zeichen : $x'$ und $x' = x \cup \{x\}$

## 4.2 Definition von natürlichen Zahlen

Definition von 0 ist eine Menge mit null Elemente .
d.h. $0 = \emptyset$
Dann $1 = 0'$ ( = { 0 } )
$2 = 1'$ ( = { 0 , 1 })
$3 = 2'$ ( = { 0 , 1 , 2 })
……

## 4.3 Peanosches Axiomensystem

Menge N ist Menge von alle natürlichen Zahlen .

1. $0 \in N$ ( natürlich , $0 = \emptyset$ ) , und
2. wenn $n \in N$ , dann $n' \in N$ ( $n' = n \cup \{n\}$ )
3. wenn $S \subseteq N$ , $0 \in S$ , und für alle $n \in S$ gilt $n' \in S$ , dann S = N
4. $n' \neq 0$ für alle n in N
5. wenn n und m in N sind ,und wenn $n' = m'$, dann n = m .

Aus dem 3. ergibt sich das Beweisprinzip der mathematische Induktion.
Der Beweis erfolgt in zwei sogenannten Induktionsschritten . Der erste dieser beiden ist bereits vorstehend dadurch erledigt , daß die Gültigkeit des Satzes für den Anfangswert 0 der Variablen n , d.h. kurz für n = 0 nachgewiesen wurde .
Im 2. Induktionsschritt ist nun zu zeigen , daß sich unter der Voraussetzung der Richtigkeit des Satzes für eine bestimmte Zahl n , etwa n = k , ( Induktionsannahme oder Induktionsvoraussetzung ) auch die Richtigkeit für den Nachfolger von k , also für n = k+1 , begründen und rechnerisch herleiten läßt .

Aus Peanosches Axiomensystem ist das möglich , ganze Zahlen ,rationale Zahlen , reelle Zahlen und komplexe Zahlen zu definieren .

## Literatur


1. „Naive Set Theory“ von Paul R. Halmos *D. Van Nostrand Company ,Inc.1960*

2. „Mengenlehre – Theoretische und didaktische Grundlagen“ *Verlag Dokumentation München . 1975*