Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. M. Broy

WS 1999/2000
Übungsblatt 4
24. Nov. 1999

Übungen zur Vorlesung
„Grundlagen der Programm- und Systementwicklung“

<u>Aufgabe 1</u> vollständige und strukturelle Induktion (für die Zentralübung)

1. Gegeben seien die Funktionsdefinitionen in ML-Notation

```
fun foldr f e [] = e
    | foldr f e (x::xs) = f(x, foldr f e xs)
fun foldl f e [] = e
    | foldl f e (x::xs) = foldl f (f(x, e)) xs
```

   Zeigen Sie, daß für assoziative, kommutative Funktionen ⊕ mit neutralem Element `eins` für beliebige Listen `L` gilt: `foldr ⊕ eins L = foldl ⊕ eins L`.
   Fragestellungen dieser Art spielen in der Rekursionsoptimierung eine große Rolle.
2. Gegeben seien die folgenden Definitionen in ML-Notation

```
datatype symb = Plus | Mal | Minus | Durch;
datatype expr = I of int | C of expr*symb*expr;
fun numcnt (I x) = 1
  | numcnt (C(x,s,y)) = (numcnt x)+(numcnt y);
fun opcnt (I x) = 0
  | opcnt (C(x,s,y)) = 1+(opcnt x)+(opcnt y);
```

wobei die beiden definierten Funktionen in Ausdrücken die Anzahl der Operanden und die der Operatoren zählen:
Zeigen Sie mit struktureller Induktion, daß für endliche $x \in expr$ gilt:
`numcnt x = (opcnt x)+1`.

<u>Aufgabe 2</u> Noethersche Induktion (für die Zentralübung)

Das Beweisprinzip der Noetherschen Induktion besagt für eine Eigenschaft E und eine Noethersche Ordnung $\prec$ auf einem Definitionsbereich D folgendes:

Um E(x) für alle x nachzuweisen, genügt es, E(z) unter der Voraussetzung nachzuweisen, daß E(y) für alle Vorgänger y von z gilt.

Anders gesagt: (*) bezeichne die Eigenschaft *„Die Gültigkeit von E für alle $\prec$-Vorgänger eines $x \in D$ impliziert auch die Gültigkeit von E für x selbst.“*
Wenn man nun (*) für alle $x \in D$ zeigen kann, dann gilt auch E für alle $x \in D$.
(als Formel: $[\forall x \in D : (\forall y \in D : y \prec x \Rightarrow E(y)) \Rightarrow E(x)] \Rightarrow \forall x \in D : E(x)$)

1. Warum gilt dieses Prinzip? Warum ist die strukturelle Induktion ein Spezialfall der Noetherschen Induktion?

2. Zeigen Sie mit vollständiger und mit Noetherscher Induktion, daß gilt: $\forall u \in \{a,b\}^* : a \neq b \Rightarrow a \circ u \neq u \circ b$. Dabei bezeichnet $x \circ y$ die Konkatenation der Strings x und y. Warum ist (allgemein!) die vollständige Induktion ein Spezialfall der Noetherschen Induktion?
3. Die Ackermann-Funktion ist wie folgt definiert:

```
                    y+1,                falls x=0
ack(x,y) =          ack(x-1,1),         falls x≠0 und y=0
                    ack(x-1, ack(x,y-1))   sonst
```

Zeigen Sie mit Noetherscher Induktion, daß `ack` terminiert! (**Hinweis:** Denken Sie an ein Telephonbuch, wenn Sie eine Noethersche Ordnung auf Paaren `(x,y)` suchen!)