Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. M. Broy

WS 1999/2000
Übungsblatt 9
12. Januar 2000

Übungen zur Vorlesung
„Grundlagen der Programm- und Systementwicklung“

Aufgabe 9.1 (H) Monotone, nicht-stetige Funktion

$\wp(\mathbb{N})$ bezeichnet die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, d.h. die Menge der Mengen natürlicher Zahlen. Auf $\wp(\mathbb{N})$ ist die folgende Ordnung $\leq$ definiert: $\forall A,B \in \wp(\mathbb{N})$: $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Außerdem gibt es eine Funktion $f: \wp(\mathbb{N}) \rightarrow \wp(\mathbb{N})$ mit $f(A) = \{42\}$, falls A eine endliche Menge ist und $f(A) = \mathbb{N}$ sonst. Zeigen Sie, daß f bzgl. $\leq$ monoton, aber nicht stetig ist!

Aufgabe 9.2 (H) Fixpunktberechnung: deduktive Datenbanken

$\mathbf{D_R}$ = {`hans, katharina, margit, gerhard, philipp, david, heinz, gertrud, michael, marlene, sabine, kurt`} ist eine Personendatenbank, und

R = {
```
true⇒m(hans), true⇒m(heinz), true⇒m(gerhard), true⇒m(michael),
true⇒m(philipp), true⇒m(david), true⇒m(kurt), true⇒w(katharina),
true⇒w(gertrud), true⇒w(margit), true⇒w(marlene), true⇒w(sabine),
true⇒elternVon(margit,hans,katharina),
true⇒elternVon(michael,hans,katharina),
true⇒elternVon(marlene,heinz,gertrud),
true⇒elternVon(philipp,margit,gerhard),
true⇒elternVon(sabine,michael,marlene), true⇒elternVon(kurt,sabine,david),
true⇒verschieden(hans,katharina), true⇒verschieden(hans,margit), ...,

elternVon(X,V,M)∧elternVon(Y,V,M)∧verschieden(X,Y) ⇒ geschwister(X,Y),
m(X)∧geschwister(X,Y) ⇒ bruderVon(X,Y),
w(X)∧geschwister(X,Y) ⇒ schwesterVon(X,Y),
elternVon(X,V,M) ⇒ vaterVon(V,X),
elternVon(X,V,M) ⇒ mutterVon(M,X),
vaterVon(X,Z)∧vaterVon(Z,Y) ⇒ grossvaterVon(X,Y),
vaterVon(X,Z)∧mutterVon(Z,Y) ⇒ grossvaterVon(X,Y),
schwesterVon(X,M)∧mutterVon(M,Y) ⇒ tanteVon(X,Y),
schwesterVon(X,V)∧vaterVon(V,Y) ⇒ tanteVon(X,Y),
grossvaterVon(X,Z)∧vaterVon(Z,Y) ⇒ urgrossvaterVon(X,Y),
grossvaterVon(X,Z)∧mutterVon(Z,Y) ⇒ urgrossvaterVon(X,Y)}
```

ist eine Regelmenge, in der

- `m(X)` für `männlich(X)` und `w(X)` für `weiblich(X)` steht,
- z.B. `mutterVon(K,M)` für „M ist Mutter von K“ und `elternVon(K,V,M)` für „V und M sind Vater bzw. Mutter von K“ steht,
- Variablen durch Großbuchstaben gekennzeichnet sind (`M,V,X,Y,Z`) und
- ⇒ die logische Implikation bezeichnet.

Auf der Grundmenge $B_R = \{p(t_1,\dots,t_n) \mid \{t_1,\dots,t_n\} \subseteq D_R, p \text{ kommt in } R \text{ vor}\}$ ist der Inferenzoperator $T_R : \wp(B_R) \to \wp(B_R)$ wie folgt definiert:

$$T_R(I) = \{c \in B_R \mid k_1 \wedge \dots \wedge k_m \Rightarrow c \quad \textit{ist Grundinstanz eines } \varphi \in R \textit{ mit } \{k_1,\dots,k_m\} \subseteq I\}.$$

Dabei heißt ψ *Grundinstanz* eines $\varphi \in R$, falls es eine Belegung β:Var(φ)$\to$D der in φ vorkommenden Variablen gibt, so daß $\overline{\beta}(\varphi) = \psi$ und Var(ψ)=$\varnothing$ ist. Var(φ) bezeichnet die Menge der in φ vorkommenden Variablen, und $\overline{\beta}$ ist die Fortsetzung von β auf Termen, d.h. für β={X$\to$michael, Y$\to$margit} ist $\overline{\beta}(bruderVon(X,Y)) = bruderVon(michael, margit)$.

1. Zeigen Sie, daß T_R stetig ist!
2. Zeichnen Sie den R entsprechenden Stammbaum auf, und berechnen Sie den kleinsten Fixpunkt von T_R! Beginnen Sie die Iteration nicht mit $\varnothing$, sondern mit {`true`}. Warum werden die Regeln für `verschieden` benötigt?

<u>Aufgabe 9.3</u> (H) Fixpunktinduktion

Eine Teilmenge X einer vollständig geordneten Menge (cpo) heißt *F-abgeschlossen*, falls $F(X) \subseteq X$ für eine monotone Funktion F (d.h. $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$) gilt. Das Prinzip der *Fixpunktinduktion* besagt, daß $lfpF \subseteq X$ ist, falls X F-abgeschlossen ist. Damit ist der kleinste Fixpunkt die kleinste F-abgeschlossene Menge, und wenn eine Menge (eine Eigenschaft) E F-abgeschlossen ist, dann besitzt auch der lfp diese Eigenschaft E (d.h. $lfpF \subseteq E$). Gegeben sei nun die BNF-Regel $V ::= 0 | 1V$ und die zugehörige stetige Funktion $\overline{V}(S) = \{0\} \cup \{1s \mid s \in S\}$.

1. Berechnen Sie $lfp\overline{V}$, und zeigen Sie z.B. per Fixpunktinduktion, daß jeder darin enthaltene String endlich ist!
2. Wieso ist die vollständige Induktion ein Spezialfall der Fixpunktinduktion?
3. Warum stellen wir keine Aufgabe, die Fixpunktinduktion und die Datenbankaufgabe in Beziehung setzt?

Bemerkung. Das Prinzip der Fixpunktinduktion gilt allgemein auf cpos mit einer partiellen Ordnung $\subseteq$ und einer kleinsten oberen Schranke (lub) $\cup$, wenn die betrachtete Eigenschaft E *zulässig* (engl. *admissible*) ist. Dabei heißt E *zulässig*, falls E($\perp$) gilt und E für ω-Ketten abgeschlossen unter lub-Bildung ist, d.h. für jede ω-Kette $x_1 \subseteq x_2 \subseteq \cdots \subseteq x_n \subseteq \cdots$ gilt: $(\forall i : E(x_i)) \Rightarrow E(\bigcup_{i\in\omega} x_i)$.