Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Gerwin Klein

Sommersemester 2001
Übungsblatt 12
16. 7. 2001

Übungen zur Logik

Aufgabe 1

Geben Sie eine Herleitung der folgenden beiden Regeln in HOL an:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash t(\varepsilon\ t) \quad \Gamma_2, t\ v \vdash t'}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash t'}\ (\varepsilon\ E)^* \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \exists x.\ t\ x \quad \Gamma_2, t\ v \vdash t'}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash t'}\ (\exists\ E)^*$$

* (v kommt in $\Gamma_1, \Gamma_2, t, t'$ nicht frei vor)

Aufgabe 2

Sei der $\exists$-Quantor im Gegensatz zur Vorlesung wie folgt definiert:

$$\mathrm{ex}_2\ P \equiv \neg(\forall x.\ \neg P\ x)$$

Zeigen Sie, dass sich damit auch die Definition aus der Vorlesung herleiten lässt, d.h. zeigen Sie dass gilt:

$$\mathrm{ex}_2\ P \vdash \mathrm{ex}\ P$$

Aufgabe 3

Definieren Sie den Datentyp des Kreuzprodukts $\alpha \times \beta$ zu zwei Typen α und β in HOL.

Aufgabe 4

Kantors Theorem besagt, dass jede Menge weniger Elemente als ihre Potenzmenge besitzt. Anders ausgedrückt: keine Funktion f, die Elemente vom Typ α auf Mengen von Elementen des Typs α abbildet, kann surjektiv sein.

Formalisieren und beweisen Sie Kantors Theorem in HOL.

Sie können dabei zusätzlich zu den aus der Vorlesung bekannten die folgenden Regeln benutzen:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash f = g \quad \Gamma_2, \forall x.\ f\ x = g\ x \vdash t}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash t}\ \mathrm{eq}\ E \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 = t_2 \quad \Gamma_2, t_1 \to t_2, t_2 \to t_1 \vdash t}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash t}\ \mathrm{iff}\ E$$

Natürliches Schließen in HOL

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; t_2}{\Gamma - \{t_1\} \;\vdash\; t_1 \to t_2} \to I \qquad \frac{\Gamma_1 \;\vdash\; t_1 \to t_2 \quad \Gamma_2 \;\vdash\; t_1}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\vdash\; t_2} \to E$$

$$\frac{\Gamma_1 \;\vdash\; t_1 \quad \Gamma_2 \;\vdash\; t_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\vdash\; t_1 \wedge t_2} \wedge I \qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; t_1 \wedge t_2}{\Gamma \;\vdash\; t_1} \wedge E_1 \quad \frac{\Gamma \;\vdash\; t_1 \wedge t_2}{\Gamma \;\vdash\; t_2} \wedge E_2$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; t_1}{\Gamma \;\vdash\; t_1 \vee t_2} \vee I_1 \quad \frac{\Gamma \;\vdash\; t_2}{\Gamma \;\vdash\; t_1 \vee t_2} \vee I_2 \qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; t_1 \vee t_2 \quad \Gamma_1 \;\vdash\; t_1 \quad \Gamma_2 \;\vdash\; t_2}{\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\vdash\; t} \vee E$$

$$\frac{\Gamma, t \;\vdash\; \bot}{\Gamma \;\vdash\; \neg t} \neg I \quad \frac{\Gamma_1 \;\vdash\; t \quad \Gamma_2 \;\vdash\; \neg t}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\vdash\; \bot} \neg E \quad \frac{\Gamma, \neg t \;\vdash\; \bot}{\Gamma \;\vdash\; t} \bot$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; t_1\; t_2}{\Gamma \;\vdash\; \exists x.\, t_1\; x} \exists I \qquad \frac{\Gamma_1 \;\vdash\; \exists x.\, t\; x \quad \Gamma_2, t\; x \vdash t'}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash t'} \exists E *$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; t\; x}{\Gamma \;\vdash\; \forall x.\, t\; x} \forall I * \qquad \frac{\Gamma_1 \;\vdash\; \forall x.\, t_1\; x \quad \Gamma_2, t_1\; t_2 \;\vdash\; t}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\vdash\; t} \forall E$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; t\; t'}{\Gamma \;\vdash\; t(\varepsilon\; t)} \varepsilon I \qquad \frac{\Gamma_1 \;\vdash\; t(\varepsilon\; t) \quad \Gamma_2, t\; x \vdash t'}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash t'} \varepsilon E *$$

$*$ x nicht frei in $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, t, t'$