

Aufgabe 1

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Kreuzen Sie in der entsprechenden Spalte an! Eine Begründung ist nicht erforderlich.

In den Aussagen stehen F und G für aussagenlogische Formeln und M , M_1 und M_2 für Mengen solcher Formeln. Die Symbole f , g und h sind Funktionssymbole, a ein Konstantensymbol, und x , y und z Variable.

	wahr	falsch
Wenn $F \rightarrow G \models F$, dann $F \models G$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Wenn $M_1 \cup M_2$ erfüllbar, dann ist M_1 nicht kontradiktorisch.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn M_1 erfüllbar und M_2 erfüllbar, dann ist $M_1 \cup M_2$ erfüllbar.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Wenn $F \vdash_{\mathbf{H}} \neg F$, dann $\neg F \vdash_{\mathbf{H}} F$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Wenn $F \vdash_{\mathbf{H}} \neg F$, dann $F \vdash_{\mathbf{H}} G$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn F kein unendliches Modell hat, dann hat es auch kein endliches Modell.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine Formelmenge M , die unerfüllbar ist, für die aber jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$f(a, g(x))$ ist ein Unifikat von $f(x, g(x))$ und $f(a, x)$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$[y/g(x), z/x]$ ist allgemeinsten Unifikator von $f(g(x), y)$ und $f(y, g(z))$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f(g(z), h(x))$ ist ein Unifikat von $f(x, y)$ und $f(g(z), y)$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 2**10 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir aussagenlogische Formeln in Klauselnormform mit folgender Einschränkung:

Jede Klausel enthält mindestens zwei Literale, und die Literale einer Klausel sind entweder alle positiv oder alle negativ.

Sind alle Formeln dieser Art erfüllbar? Begründen Sie!

Lösung

Nicht alle Formeln dieser Art sind erfüllbar. Betrachte

$$\begin{aligned} & \{\{A, B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg C\}\} \\ & \equiv (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \wedge (A \leftrightarrow C) \end{aligned}$$

Aus $A \leftrightarrow B$ und $B \leftrightarrow C$ folgt $A \leftrightarrow C$; dies steht im Widerspruch zur dritten Teilformel.

Aufgabe 3**5 Punkte**

Bringen Sie die Formel

$$(\neg A \wedge B \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \vee \neg(\neg A \wedge (B \vee C))$$

in konjunktive Normalform!

Lösung

$$\begin{aligned} & (\neg A \wedge B \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \vee \neg(\neg A \wedge (B \vee C)) \\ & \equiv A \vee \neg B \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee A \vee (\neg B \wedge \neg C) \\ & \equiv (\neg B \vee B \vee A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee \neg B) \wedge \\ & \quad (\neg B \vee B \vee A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C \vee A \vee \neg C) \\ & \equiv A \vee \neg B \vee C \end{aligned}$$

Aufgabe 4**10 Punkte**

Gegeben ist die prädikatenlogische Formel

$$\begin{aligned} F = & (\forall x(P(x) \rightarrow \neg P(f(x))) \wedge \\ & \exists x(\neg P(f(x)) \rightarrow P(x))) \rightarrow \\ & \exists x(P(x) \wedge \neg P(f(x))). \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe eines prädikatenlogischen Kalküls Ihrer Wahl, dass F allgemeingültig ist!

Lösung

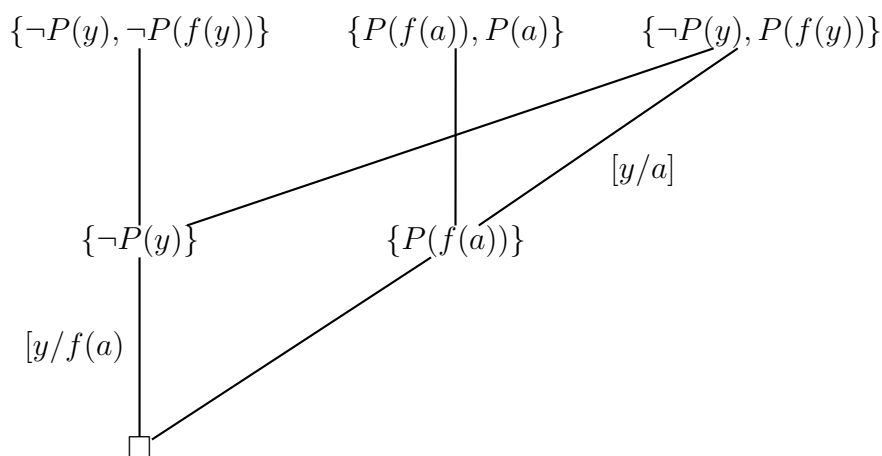
Mit Resolutionskalkül:

$$\begin{aligned}\neg F &\equiv (\forall x(P(x) \rightarrow \neg P(f(x))) \wedge \exists x(\neg P(f(x)) \rightarrow P(x))) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))) \\ &\equiv (\forall y(P(y) \rightarrow \neg P(f(y))) \wedge \exists x(\neg P(f(x)) \rightarrow P(x))) \wedge \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y))) \\ &\equiv \exists x\forall y((P(y) \rightarrow \neg P(f(y))) \wedge (\neg P(f(x)) \rightarrow P(x)) \wedge (\neg P(y) \vee P(f(y))))\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Skolemform

$$\forall y((P(y) \rightarrow \neg P(f(y))) \wedge (\neg P(f(a)) \rightarrow P(a)) \wedge (\neg P(y) \vee P(f(y))),$$

und aus der Klauseldarstellung kann die leere Klausel hergeleitet werden:



Aufgabe 5

5 Punkte

Gegeben ist die Formel:

$$F = \forall x\exists y\exists z(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg(y \doteq z))$$

Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten, prädikatenlogischen Struktur, dass F erfüllbar ist!

Lösung

Die Struktur $\mathcal{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, I)$ mit

$$\begin{aligned}I(P) &= \{(n, 2n) | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{(n, 2n + 1) | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ I(\doteq) &= \{(n, n) | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}\end{aligned}$$

ist ein Modell von F , da es zu jedem x zwei verschiedene y und z gibt, so dass $(x, y) \in I(P)$ und $(x, z) \in I(P)$.

Hinweis: Die Interpretation von \doteq braucht nicht extra angegeben zu werden.