Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Gleichungslogik und Lambda-Kalkül
Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 11
Besprechung am 28. Januar 2008

Aufgabe 1 (H) (*Kombinatorische Logik*)

Seien die Kombinatoren S, K und I wie folgt definiert:

$$\mathsf{I} = \lambda x.\, x \qquad \mathsf{K} = \lambda xy.\, x \qquad \mathsf{S} = \lambda xyz.\, xz(yz)$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathsf{SKK} \stackrel{*}{\longleftrightarrow}_\beta \mathsf{I}$

b) Finden Sie Terme A, und W, die nur I, K und S, und Applikationen enthalten, und wie folgt reduzieren:

   i) $\mathsf{A}\, x \longrightarrow_\beta^* x\, x$ ii) $\mathsf{W}\, x\, y \longrightarrow_\beta^* x\, y\, y$

   Zeigen Sie, dass die geforderten Reduktionen gelten.

Aufgabe 2 (H) (*Parallele β-Reduktion*)

In der Vorlesung wurde die parallele β-Reduktion $>$ wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{array}{rcrcl}
 & & s & > & s \\
s > s' & \Longrightarrow & \lambda x.s & > & \lambda x.s' \\
s > s' \;\wedge\; t > t' & \Longrightarrow & (s\ t) & > & (s'\ t') \\
s > s' \;\wedge\; t > t' & \Longrightarrow & (\lambda x.s)\ t & > & s'\ [t'/x]
\end{array}$$

- Zeigen Sie: $\longrightarrow_\beta \subseteq\, > \,\subseteq\, \stackrel{*}{\longrightarrow}_\beta$

Aufgabe 3 (Ü) (*Listen*)

Geben Sie λ-Terme für `nil`, `cons`, `hd`, `tl` und `null` an, die Listen im λ-Kalkül codieren. Zeigen Sie, dass mit Ihren Termen gilt:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\texttt{null}\,\texttt{nil} & \longrightarrow^* & \texttt{true} & \texttt{hd}\,(\texttt{cons}\ x\ l) & \longrightarrow^* & x \\
\texttt{null}\,(\texttt{cons}\ x\ l) & \longrightarrow^* & \texttt{false} & \texttt{tl}\,(\texttt{cons}\ x\ l) & \longrightarrow^* & l
\end{array}$$

Hinweis: Benutzen Sie Paare!

Aufgabe 4 (Ü) (*Konfluenz der β-Reduktion*)

In der Vorlesung wurde Konfluenz von $\longrightarrow_\beta$ mit Hilfe der Diamanteigenschaft der parallelen β-Reduktion $>$ gezeigt (vgl. Aufgabe 2). In dieser Aufgabe wird ein einfacherer

Beweis entwickelt. Die Operation $*$ auf λ-Termen wird induktiv über den Termaufbau definiert:

$$\begin{array}{rcll} x^* & = & x & \\ (\lambda x.\, t)^* & = & \lambda x.\, t^* & \\ (t_1 t_2)^* & = & t_1^* t_2^* & \text{für } t_1 t_2 \text{ nicht } \beta\text{-reduzierbar.} \\ ((\lambda x.\, t_1) t_2)^* & = & t_1^*[t_2^*/x] & \end{array}$$

a) Zeigen Sie für zwei beliebige λ-Terme s und t: $s > t \quad \Longrightarrow \quad t > s^*$

b) Zeigen Sie die Konfluenz von $\longrightarrow_\beta$.