Das System des natürlichen Schließen

Till Rohrmann

27. April 2009

1 Einführung

Das System des natürlichen Schließens ist ein deduktives Beweissystem für aussagenlogische Formeln. Das Kalkül erlaubt uns die Ableitung von aussagenlogischen Formeln aus einer Menge von Prämissen und die Verifikation der Korrektheit von Aussagen wie z.B. "Wenn es regnet, werde ich naß. Ich bin nicht naß. Folglich hat es nicht geregnet.".

Um das zu bewerkstelligen, bietet uns das Kalkül eine Menge von Inferenzregeln an. Durch Anwenden dieser Regeln auf eine Menge von Prämissen, erhalten wir neue abgeleitete aussagenlogische Formeln, die bei wiederholter Anwendung ebenfalls als Prämissen verwendet werden können.

Wollen wir nun beweisen, dass sich eine Aussage ψ aus einer Menge von Prämissen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, die wir im folgenden als $\mathcal{A}$ bezeichnen, ableiten lässt, schreiben wir:

$$\mathcal{A} \vdash \psi$$

Nun müssen wir probieren, durch Verwendung der Prämissen und Anwendung der Inferenzregelen die Konklusion ψ zu erhalten. Wenn uns dies gelingt, haben wir im System des natürlichen Schließens einen Beweis für $\mathcal{A} \vdash \psi$ gefunden und sagen, dass $\mathcal{A} \vdash \psi$ gültig ist.

Definition 1. *$\mathcal{A}$ bezeichnet die Menge der Prämissen und wird, wenn explizit angegeben, in der Form $\mathcal{A} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ notiert.*

Definition 2. *Eine endliche Sequenz von $\mathcal{A} \vdash \psi_1, \mathcal{A} \vdash \psi_2, \ldots, \mathcal{A} \vdash \psi_n$ ist ein Beweis der aussagenlogischen Formel ψ mit den Prämissen $\mathcal{A}$, genau dann wenn:*

1. $\psi_n = \psi$
2. $\forall i : 0 < i \leq n$: *Die Formel ψ_i ist entweder eine Prämisse der Menge $\mathcal{A}$ oder wurde aus einer Inferenzregel abgeleitet.*

Definition 3. *$\mathcal{A} \vdash \psi$ ist gültig, genau dann wenn es einen Beweis für $\mathcal{A} \vdash \psi$ im System des natürlichen Schließens gibt.*

2 Regeln

Wir unterscheiden zwischen 4 Arten von Regeln

Basisregeln:

Annahmeregel Für alle $\mathcal{A}$ gilt, wenn $\phi \in \mathcal{A}$:

$$\frac{}{\mathcal{A} \vdash \phi}\text{Annahmeregel}$$

Strukturelle Regeln:

Abschwächung Für alle $\mathcal{A}, \phi$ und ψ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi}{\mathcal{A}, \psi \vdash \phi}\text{Abschwächung}$$

Induktive Inferenzregeln:

Konjunktionseinführung Für alle $\mathcal{A}, \phi$ und ψ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi \qquad \mathcal{A} \vdash \psi}{\mathcal{A} \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

Konjunktionsbeseitigung Für alle $\mathcal{A}, \phi$ und ψ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi \wedge \psi}{\mathcal{A} \vdash \phi}\ \wedge e_1 \qquad \frac{\mathcal{A} \vdash \phi \wedge \psi}{\mathcal{A} \vdash \psi}\ \wedge e_2$$

Disjunktionseinführung Für alle $\mathcal{A}, \phi$ und ψ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi}{\mathcal{A} \vdash \phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\mathcal{A} \vdash \phi}{\mathcal{A} \vdash \psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

Disjunktionsbeseitigung Für alle $\mathcal{A}, \phi, \psi$ und χ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi \vee \psi \quad \mathcal{A}, \phi \vdash \chi \quad \mathcal{A}, \psi \vdash \chi}{\mathcal{A} \vdash \chi}\ \vee e$$

Implikationseinführung Für alle $\mathcal{A}, \phi$ und ψ gilt:

$$\frac{\mathcal{A}, \phi \vdash \psi}{\mathcal{A} \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow i$$

Implikationsbeseitigung Für alle $\mathcal{A}, \phi$ und ψ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi \Rightarrow \psi \qquad \mathcal{A} \vdash \phi}{\mathcal{A} \vdash \psi} \Rightarrow e$$

Negationseinführung Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ gilt:

$$\frac{\mathcal{A}, \phi \vdash \bot}{\mathcal{A} \vdash \neg\phi} \neg i$$

Negationsbeseitigung Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \neg\phi \qquad \mathcal{A} \vdash \phi}{\mathcal{A} \vdash \bot} \neg e$$

Bottom-Beseitigung Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \bot}{\mathcal{A} \vdash \phi} \bot e$$

Doppelte Negationsbeseitigung Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ gilt:

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \neg\neg\phi}{\mathcal{A} \vdash \phi} \neg\neg e$$

Abgeleitete Regeln: Einige abgeleitete Regeln, die wir im weiteren Verlauf benötigen

Doppelte Negationseinführung Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ

$$\frac{\mathcal{A} \vdash \phi}{\mathcal{A} \vdash \neg\neg\phi} \neg\neg i$$

Beweis der Regel der doppelten Negationseinführung: Es gelte $\mathcal{A} \vdash \phi$

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ	Voraussetzung
2.	$\mathcal{A}, \neg\phi$	$\vdash$	$\neg\phi$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}, \neg\phi$	$\vdash$	ϕ	Abschwächung 1
4.	$\mathcal{A}, \neg\phi$	$\vdash$	$\bot$	$\neg e$ 2, 3
5.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\neg\phi$	$\neg i$ 4

Beweis durch Widerspruch Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ gilt:

$$\frac{\mathcal{A}, \neg\phi \vdash \bot}{\mathcal{A} \vdash \phi}\ \text{BdW}$$

Beweis der Regel Beweis durch Widerspruch: Es gelte $\mathcal{A}, \neg\phi \vdash \bot$

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}, \neg\phi$	$\vdash$	$\bot$	Voraussetzung
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\neg\phi$	$\neg i$ 1
3.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ	$\neg\neg e$ 2

Gesetz des ausgeschlossenen Dritten Für alle $\mathcal{A}$ und ϕ gilt:

$$\frac{}{\mathcal{A} \vdash \phi \lor \neg\phi}\ \text{GdaD}$$

Beweis des Gesetzes des ausgeschlossenen Dritten:

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi)$	$\vdash$	$\neg(\phi \lor \neg\phi)$	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi), \neg\neg\phi$	$\vdash$	$\neg\neg\phi$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi), \neg\neg\phi$	$\vdash$	ϕ	$\neg\neg e$ 2
4.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi), \neg\neg\phi$	$\vdash$	$\phi \lor \neg\phi$	$\lor i_1$ 3
5.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi), \neg\neg\phi$	$\vdash$	$\neg(\phi \lor \neg\phi)$	Abschwächung 1
6.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi), \neg\neg\phi$	$\vdash$	$\bot$	$\neg e$ $5, 4$
7.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi)$	$\vdash$	$\neg\phi$	BdW 6
8.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi)$	$\vdash$	$\phi \lor \neg\phi$	$\lor i_2$ 7
9.	$\mathcal{A}, \neg(\phi \lor \neg\phi)$	$\vdash$	$\bot$	$\neg e$ $1, 8$
10.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi \lor \neg\phi$	BdW 9

3 Beispiele

1. $\phi \Rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\phi$

   Es gelte $\mathcal{A} = \{\phi \Rightarrow \psi, \neg\psi\}$.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}, \phi$	$\vdash$	$\neg\psi$	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}, \phi$	$\vdash$	$\phi \Rightarrow \psi$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}, \phi$	$\vdash$	ϕ	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, \phi$	$\vdash$	ψ	$\Rightarrow e$ $2, 3$
5.	$\mathcal{A}, \phi$	$\vdash$	$\bot$	$\neg e$ $1, 4$
6.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\phi$	$\neg i$ 5

2. $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

   Es gelte $\mathcal{A} = \{\neg(p \wedge q)\}$.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash$	$p \vee \neg p$	GdaD
2.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p$	$\vdash$	$q \vee \neg q$	GdaD
3.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, q$	$\vdash$	p	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, q$	$\vdash$	q	Annahmeregel
5.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, q$	$\vdash$	$p \wedge q$	$\wedge i$ $3, 4$
6.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	Annahmeregel
7.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, q$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ $6, 5$
8.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, \neg q$	$\vdash$	$\neg q$	Annahmeregel
9.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, \neg q$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	$\vee i_2$ 8
10.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, \neg q$	$\vdash$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	Annahmeregel
11.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p, \neg q$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ $10, 9$
12.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), p$	$\vdash$	$\perp$	$\vee e$ $2, 7, 11$
13.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	Annahmeregel
14.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	$\vee i_1$ 13
15.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	Annahmeregel
16.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ $15, 14$
17.	$\mathcal{A}, \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash$	$\perp$	$\vee e$ $1, 12, 16$
18.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	BdW 17

4 Korrektheit

Nun können wir mithilfe der Regeln aussagenlogische Formeln im System des natürlichen Schließens verifizieren und neue aussagenlogische Formeln ableiten. Wenn wir für $\mathcal{A} \vdash \psi$ einen Beweis gefunden haben, können wir aber noch nicht sagen, dass ψ aus $\mathcal{A}$ folgt. Diese Eigenschaft nennen wir Korrektheit.

Definition 4. *Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln. Sei ψ eine aussagenlogische Formel. Wenn bei jeder Belegung, in der alle aussgenlogischen Formeln in $\mathcal{A}$ den Wahrheitswert TRUE annehmen, ψ ebenfalls den Wahrheitswert TRUE annimmt, dann sagen wir ψ folgt aus $\mathcal{A}$ und schreiben:*

$$\mathcal{A} \models \psi$$

Definition 5. *$\mathcal{A} \models \psi$ bezeichnen wir als korrekte Inferenz.*

Wenn $\mathcal{A}$ eine endliche Menge ist, dann können wir $\mathcal{A} \models \psi$ auch als allgemeingültige Implikation der Form $\mathcal{A} \Rightarrow \psi$ auffassen. Zu beachten ist, dass die einzelnen aussagenlogischen Formeln in $\mathcal{A}$ bei expliziter Notation durch Konjunktionen miteinander verbunden werden müssen.

Damit das System des natürlichen Schließens korrekt ist, muss gelten: Wenn $\mathcal{A} \vdash \psi$ gültig ist, dann folgt daraus $\mathcal{A} \models \psi$.

Theorem 1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln, die wir als Prämissen bezeichnen. Sei ψ ebenfalls eine aussagenlogische Formel. Wenn $\mathcal{A} \vdash \psi$ gültig ist, dann gilt $\mathcal{A} \models \psi$.*

Zu zeigen ist, dass jeder Beweis eine korrekte Inferenz impliziert. Dies geschieht durch strukturelle Induktion über die Länge des Beweises. Ein Beweis ist eine Liste der Form:

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_1	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi_1 \vee \psi$	$\vee i_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_n	Regel

Induktionsanfang: Wenn der Beweis die Länge $l = 1$ hat, dann kann nur die Annahmeregel angewendet worden sein, da diese Regel keine Vorbedingungen hat:

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ψ	Annahmeregel

Daraus folgt $\psi \in \mathcal{A}$. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{A} \models \psi$, womit der Induktionsanfang bewiesen worden wäre.

Induktionsannahme: Für alle $n < l$ gilt, dass ein Beweis der Länge n eine korrekte Inferenz impliziert.

Induktionsschritt: Existiere für $\mathcal{A} \vdash \psi$ ein Beweis der Länge l, dann gilt $\mathcal{A} \models \psi$.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_1	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi_1 \vee \psi$	$\vee i_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ψ	Regel

Alle Zwischenschritte des Beweises sind wiederum Beweise und implizieren aufgrund der Induktionsannahme korrekte Inferenzen. Deshalb ist, was zwischen der 1. und der l. Zeile passiert, nicht von Belang. Wichtig ist, welche Regel im letzten Schritt angewendet wurde und womit sie begründet wurde. Da wir nicht wissen können, welche Regel angewendet wurde, muss die Korrektheit für jede Regel gezeigt werden.

$\wedge i$: Als letztes wurde die Regel der Konjunktionseinführung angewendet. Damit hat ψ die Form $\phi_m \wedge \phi_n$. Damit die Regel angewendet werden kann, müssen ϕ_m und ϕ_n vor der Zeile l bewiesen worden sein. Seien die Zeilen, in denen ϕ_m und ϕ_n bewiesen wurden, m und n. Da $m, n < l$ gilt, folgt aus $\mathcal{A} \vdash \phi_m$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_n$ nach Induktionsannahme $\mathcal{A} \models \phi_m$ und $\mathcal{A} \models \phi_n$. Da ϕ_m und ϕ_n wahr sind, wenn die Prämissen erfüllt sind, so ist auch $\phi_m \wedge \phi_n$ wahr. Das impliziert $\mathcal{A} \models \phi_m \wedge \phi_n$.

$\wedge e$: Als letztes wurde die Regel der Konjunktionsbeseitigung angewendet. Um die Regel anwenden zu können, muss eine Formel der Form $\mathcal{A} \vdash \psi \wedge \phi_m$ oder $\mathcal{A} \vdash \phi_m \wedge \psi$ in einer Zeile m mit $m < l$ bewiesen worden sein.

1. $\mathcal{A} \vdash \psi \wedge \phi_m$: Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi_m$. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{A} \models \psi$, da ψ wahr ist, wenn $\psi \wedge \phi_m$ wahr ist.
2. $\mathcal{A} \vdash \phi_m \wedge \psi$: Analog

$\vee i$: Als letztes wurde die Regel der Disjunktionseinführung angewendet. Damit hat ψ entweder die Form $\phi_m \vee \phi$ oder $\phi \vee \phi_m$. Die Anwendung der Regel impliziert, dass $\mathcal{A} \vdash \phi_m$ in einer Zeile m mit $m < l$ bewiesen wurde. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \models \phi_m$. Da eine Disjunktion wahr ist, wenn mindestens eine der beiden aussagenlogischen Formeln wahr ist, so gilt auch $\mathcal{A} \models \phi_m \vee \phi$ und $\mathcal{A} \models \phi \vee \phi_m$.

$\vee e$: Als letztes wurde die Regel der Disjunktionsbeseitigung angewendet. Die Anwendung der Regel impliziert, dass $\mathcal{A} \vdash \eta_1 \vee \eta_2$ in einer Zeile m mit $m < l$ bewiesen wurde. Des Weiteren muss unter der zusätzlichen Annahme von η_1 $\mathcal{A}, \eta_1 \vdash \psi$ und unter der zusätzlichen Annahme von η_2 $\mathcal{A}, \eta_2 \vdash \psi$ in 2 Zeilen e_1 und e_2 mit $e_1, e_2 < l$ bewiesen worden sein. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \models \eta_1 \vee \eta_2$, $\mathcal{A}, \eta_1 \models \psi$ und $\mathcal{A}, \eta_2 \models \psi$. ψ ist wahr, wenn die Prämissen und η_1 oder η_2 wahr sind. Da η_1 oder η_2 wahr sind, wenn die Prämissen wahr sind, folgt daraus $\mathcal{A} \models \psi$.

$\Rightarrow i$: Als letztes wurde die Regel der Implikationseinführung angewendet. Damit hat ψ die Form $\phi_m \Rightarrow \phi_n$. Die Anwendung der Regel impliziert, dass $\mathcal{A}, \phi_m \vdash \phi_n$ in einer Zeile n mit $n < l$ bewiesen wurde. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A}, \phi_m \models \phi_n$. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{A} \models \phi_m \Rightarrow \phi_n$.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\mathcal{A} \models \phi_m \Rightarrow \phi_n$ wäre nicht wahr, dann müsste es eine Belegung geben, bei der die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist. Die Konklusion wird nur falsch, wenn ϕ_m wahr ist und ϕ_n falsch ist. Das steht aber im Widerspruch zu $\mathcal{A}, \phi_m \models \phi_n$. $\square$

$\Rightarrow e$: Als letztes wurde die Regel der Implikationsbeseitigung angewendet. Damit hat ψ die Form ϕ_n. Die Anwendung der Regel impliziert, dass $\mathcal{A} \vdash \phi_m \Rightarrow \phi_n$ in einer Zeile n mit $n < l$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_m$ in einer Zeile m mit $m < l$ bewiesen wurden. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \models \phi_m \Rightarrow \phi_n$ und $\mathcal{A} \models \phi_m$. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{A} \models \phi_n$.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\mathcal{A} \models \phi_n$ wäre nicht wahr, dann müsste es eine Belegung geben, bei der die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist. Sei $\mathcal{A}$ wahr und ϕ_n falsch. $\mathcal{A} \models \phi_m$ impliziert, dass ϕ_m wahr ist. Wenn ϕ_m wahr ist und ϕ_n falsch, dann ist $\phi_m \Rightarrow \phi_n$ ebenfalls falsch, was im Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \phi_m \Rightarrow \phi_n$ steht. $\square$

$\neg i$: Als letztes wurde die Regel der Negationseinführung angewendet. Damit ist $\psi = \neg\phi$. Die Anwendung der Regel impliziert, dass $\mathcal{A}, \phi \vdash \bot$ in einer Zeile m mit $m < l$ bewiesen wurde. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A}, \phi \models \bot$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}, \phi$ immer falsch ist. Folglich ist die Annahme, dass ϕ gilt falsch und es gilt $\mathcal{A} \models \neg\phi$.

$\neg e$: Als letztes wurde die Regel der Negationsbeseitigung angewendet. Damit ist $\psi = \bot$, wobei die semantische Bedeutung von $\bot$ FALSE entspricht. Die Regelanwendung fordert, dass man $\mathcal{A} \vdash \phi$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi$ zuvor bewiesen hat. Seien die Zeilen der Ableitung m und n mit $m < l$ und $n < l$. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \models \phi$ und $\mathcal{A} \models \neg\phi$. Da eine Aussage und ihre Negation niemals gleichzeitig wahr sein können, sind diese beiden Aussagen nur wahr, wenn die Prämissen niemals wahr werden. Das impliziert $\mathcal{A} \models \bot$.

$\neg\neg e$: Als letztes wurde die Regel der doppelten Negationsbeseitigung angewendet. Damit hat ψ die Form ϕ_m. Die Anwendung der Regel impliziert, dass $\mathcal{A} \vdash \neg\neg\phi_m$ in einer Zeile m mit $m < l$ bewiesen wurde. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \models \neg\neg\phi_m$. Aus der Semantik der doppelten Negation folgt unmittelbar $\mathcal{A} \models \phi_m$.

$\bot e$: Als letztes wurde die Regel der Bottom-Beseitigung angewendet. Damit kann ψ eine beliebige Formel sein. Die Regel bedingt, dass $\mathcal{A} \vdash \bot$ in einer Zeile m mit $m < l$ zuvor abgeleitet wurde. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\mathcal{A} \models \bot$ wahr ist. Das kann nur der Fall sein, wenn die Prämissen niemals wahr werden. Wenn bei einer Implikation die Prämissen falsch sind, so ist die Implikation immer wahr. Deshalb kann als Konklusion jede Formel stehen. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{A} \models \psi$.

□

Damit ist die Korrektheit des Systems des natürlichen Schließens bewiesen. Mit dem System des natürlichen Schließens können wir nicht zeigen, dass eine Ableitung $\mathcal{A} \vdash \psi$ nicht gültig ist, was jedoch mit der Eigenschaft der Korrektheit gelingt. Aus $(\mathcal{A} \vdash \psi) \Rightarrow (\mathcal{A} \models \psi) \equiv \neg(\mathcal{A} \models \psi) \Rightarrow \neg(\mathcal{A} \vdash \psi)$ folgt, dass wir lediglich eine Belegung finden müssen, bei der $\mathcal{A}$ den Wahrheitswert TRUE und ψ den Wahrheitswert FALSE annimmt, um zu beweisen, dass $\mathcal{A} \vdash \psi$ nicht gültig ist.

5 Vollständigkeit

Unter der Vollständigkeit des Systems des natürlichen Schließens verstehen wir, dass zu jeder korrekten Inferenz ein Beweis im System des natürlichen Schließens existiert. Die Eigenschaft der Vollständigkeit wollen wir nun beweisen.

Theorem 2. *Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln, die wir als Prämissen bezeichnen. Sei ψ eine aussagenlogische Formel. Wenn $\mathcal{B} \models \psi$ gilt, dann ist $\mathcal{B} \vdash \psi$ gültig.*

Der Beweis besteht aus 3 Schritten.

$$\begin{array}{lrcl} 1. & \mathcal{B} \models \psi & \Rightarrow & \models \mathcal{B} \Rightarrow \psi \\ 2. & \models \mathcal{B} \Rightarrow \psi & \Rightarrow & \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi \\ 3. & \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi & \Rightarrow & \mathcal{B} \vdash \psi \end{array}$$

Im folgenden soll gelten: T steht für den Wahrheitswert TRUE und F steht für den Wahrheitswert FALSE.

1. Schritt

Zu zeigen: $(\mathcal{B} \models \psi) \Rightarrow (\models \mathcal{B} \Rightarrow \psi)$.

Beweis durch Fallunterscheidung. Es gilt $\mathcal{B} \models \psi$.

- Sei $\mathcal{B} \equiv T$. Aus $\mathcal{B} \models \psi$ folgt dann $\psi \equiv T$. Daraus folgt $\mathcal{B} \Rightarrow \psi \equiv T$.
- Sei $\mathcal{B} \equiv F$. Daraus folgt $\mathcal{B} \Rightarrow \psi \equiv T$.

Folglich gilt $(\mathcal{B} \models \psi) \Rightarrow (\models \mathcal{B} \Rightarrow \psi)$. □

2. Schritt

Definition 6. *Eine aussagenlogische Formel ψ ist ein Theorem, genau dann wenn ein Beweis $\mathcal{A} \vdash \psi$ mit $\mathcal{A} = \emptyset$ existiert.*

Definition 7. *Eine aussagenlogische Formel ψ ist eine Tautologie, genau dann wenn sie unter allen Belegungen den Wert T annimmt, d.h. $\models \psi$.*

Theorem 3. *Wenn $\models \psi$ gilt, dann ist $\vdash \psi$ gültig. Das bedeutet, wenn ψ eine Tautologie ist, dann ist ψ ein Theorem.*

Um diese Implikation zu zeigen, ist zuerst ein Zwischenschritt notwendig. Angenommen die Formel ψ besteht aus $p_1, p_2, \ldots, p_n$ atomaren Aussagen, dann hat ihre Wahrheitstabelle genau 2^n Einträge. Nun zeigen wir, dass wir zu jeder Zeile der Wahrheitstabelle einen Beweis für ψ mit den Belegungen der atomaren Aussagen als Prämissen konstruieren können. Anschließend zeigen wir, dass wir aus den einzelnen Beweisen einen Beweis für ψ erhalten.

Lemma 1. *Sei ψ eine aussagenlogische Formel, die nur aus den atomaren Aussagen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ besteht. Für alle Zeilen der korrespondierenden Wahrheitstabelle von ψ existiert entweder eine Ableitung der Form $\mathcal{A}_l \vdash \psi$, wenn ψ in der Zeile l den Wahrheitswert T hat, oder $\mathcal{A}_l \vdash \neg\psi$, wenn ψ in der Zeile l den Wahrheitswert F hat, mit $1 \leq l \leq 2^n$. $\mathcal{A}_l = \{\widehat{p_1}, \widehat{p_2}, \ldots, \widehat{p_n}\}$ bezeichnet die Menge der atomaren Aussagen in der Zeile l. Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: Wenn p_i den Wahrheitswert T in der Zeile l hat, dann ist $\widehat{p_i} = p_i$. Wenn p_i den Wahrheitswert F in der Zeile l hat, dann ist $\widehat{p_i} = \neg p_i$.*

Wir beweisen dies durch strukturelle Induktion über die Höhe h des Parsetrees der Formel ψ.

Induktionsanfang: Für $h = 1$ gilt: Die Formel ψ kann nur aus einer atomaren Aussage p bestehen. Da ψ T oder F sein kann, ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}_l \vdash p$ mit $\mathcal{A}_l = \{p\}$ und $\mathcal{A}_l \vdash \neg p$ mit $\mathcal{A}_l = \{\neg p\}$ gelten.

$\mathcal{A}_l \vdash p$**:** $\mathcal{A}_l = \{p\}$

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	p	Annahmeregel

$\mathcal{A}_l \vdash \neg p$**:** $\mathcal{A}_l = \{\neg p\}$

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg p$	Annahmeregel

Induktionsannahme: Für alle Formeln ψ' der Höhe h' mit $h' < h$ existiert entweder ein Beweis für $\mathcal{A}'_l \vdash \psi'$ oder $\mathcal{A}'_l \vdash \neg\psi'$, wobei $\mathcal{A}'_l \subseteq \mathcal{A}_l$, so dass $\mathcal{A}'_l$ alle atomaren Aussagen von ψ' enthält, und ψ' eine Teilformel von ψ ist.

Induktionsschritt: Sei ψ eine aussagenlogische Formel der Höhe h, dann gibt es einen Beweis für $\mathcal{A}_l \vdash \psi$ oder $\mathcal{A}_l \vdash \neg\psi$. Da wir die genaue Struktur der Formel ψ nicht kennen, muss die Induktion für jeden möglichen Operator durchgeführt werden. Im Weiteren bezeichnet $\mathcal{A}$ die Prämissen aus genau einer Zeile der Wahrheitstabelle.

$\neg$**:** ψ ist von der Form $\neg\phi$. Da $\neg$ ein unärer Operator ist, ist die Menge der atomaren Ausdrücke von ψ und ϕ gleich. Weil ψ den Wert T und F annehmen kann machen wir eine Fallunterscheidung.

1. ψ nimmt den Wert T an. Daraus folgt, dass ϕ den Wert F annimmt. Aus der Induktionsannahme folgt, dass es einen Beweis für $\mathcal{A} \vdash \neg\phi$ gibt. Aus dem Beweis $\mathcal{A} \vdash \neg\phi$ folgt unmittelbar $\mathcal{A} \vdash \psi$.
2. ψ nimmt den Wert F an. Daraus folgt, dass ϕ den Wert T annimmt. Aus der Induktionsannahme folgt, dass es einen Beweis für $\mathcal{A} \vdash \phi$ gibt. Wenn wir auf diese Ableitung die Regel $\neg\neg i$ anwenden, dann erhalten wir $\mathcal{A} \vdash \neg\neg\phi$. Mit $\psi = \neg\phi$ folgt daraus unmittelbar $\mathcal{A} \vdash \neg\psi$.

Im folgenden werden wir binäre Operatoren betrachten. Demzufolge ist $\psi = \phi_1 \circ \phi_2$ mit $\circ$ gleich $\Rightarrow$, $\wedge$ oder $\vee$. Sei $\mathcal{B}$ die Menge der auftretenden atomaren Aussagen in ϕ_1 und $\mathcal{C}$ die Menge der auftretenden atomaren Aussagen in ϕ_2, dann gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Wenn $\mathcal{B} \vdash \phi_1$ gilt, dann kann man die Menge der Prämissen $\mathcal{B}$ gemäß der Abschwächungsregel um $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ erweitern und erhält einen Beweis für $\mathcal{A} \vdash \phi_1$, da alle für den Beweis notwendigen Prämissen bereits in $\mathcal{B}$ enthalten sind. Selbiges gilt für $\mathcal{C} \vdash \phi_2$. Daher können wir nach der Anwendung der Induktionsannahme die Prämissenmengen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ durch $\mathcal{A}$ ersetzen.

$\wedge$**:** ψ ist von der Form $\phi_1 \wedge \phi_2$. Da ϕ_1 und ϕ_2 die Werte T oder F annehmen können, machen wir eine Fallunterscheidung.

1. ϕ_1 nimmt den Wert T und ϕ_2 nimmt den Wert T an. Folglich nimmt ψ ebenfalls den Wert T an. Aus der Induktionsannahme und der $\wedge i$ Regel erhalten wir unmittelbar die Behauptung $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$.
2. ϕ_1 nimmt den Wert F und ϕ_2 nimmt den Wert T an. Folglich nimmt ψ den Wert F an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}, \phi_1 \wedge \phi_2$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Abschwächung 1
3.	$\mathcal{A}, \phi_1 \wedge \phi_2$	$\vdash$	$\phi_1 \wedge \phi_2$	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, \phi_1 \wedge \phi_2$	$\vdash$	ϕ_1	$\wedge e_1$ 3
5.	$\mathcal{A}, \phi_1 \wedge \phi_2$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ 2, 4
6.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$	$\neg i$ 5

3. ϕ_1 nimmt den Wert T und ϕ_2 nimmt den Wert F an. Folglich nimmt ψ den Wert F an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ folgt. Beweis analog zu Fall 2, nur mit ϕ_2 statt ϕ_1.
4. ϕ_1 nimmt den Wert F und ϕ_2 nimmt den Wert F an. Folglich nimmt ψ den Wert F an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ folgt. Beweis analog zu Fall 2.

$\vee$: ψ hat die Form $\phi_1 \vee \phi_2$. Da ψ in Abhängigkeit von ϕ_1 und ϕ_2 die Werte T oder F annimmt, machen wir eine Fallunterscheidung.

1. ϕ_1 nimmt den Wert T und ϕ_2 nimmt den Wert T an. Folglich nimmt ψ ebenfalls den Wert T an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_1	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi_1 \vee \phi_2$	$\vee i_1$ 1

2. ϕ_1 nimmt den Wert F und ϕ_2 nimmt den Wert T an. Folglich nimmt ψ den Wert T an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_2	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi_1 \vee \phi_2$	$\vee i_2$ 1

3. ϕ_1 nimmt den Wert T und ϕ_2 nimmt den Wert F an. Folglich nimmt ψ den Wert T an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ folgt. Beweis analog zu Fall 1.

4. ϕ_1 nimm den Wert F und ϕ_2 nimmt den Wert F an. Folglich nimmt auch ψ den Wert F an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\phi_2$	Induktionsannahme
3.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Abschwächung 1
4.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2$	$\vdash$	$\neg\phi_2$	Abschwächung 2
5.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2$	$\vdash$	$\phi_1 \vee \phi_2$	Annahmeregel
6.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_1$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Abschwächung 3
7.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_1$	$\vdash$	ϕ_1	Annahmeregel
8.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_1$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ $6, 7$
9.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_2$	$\vdash$	$\neg\phi_2$	Abschwächung 4
10.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_2$	$\vdash$	ϕ_2	Annahmeregel
11.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_2$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ $9, 10$
12.	$\mathcal{A}, \phi_1 \vee \phi_2$	$\vdash$	$\perp$	$\vee e$ $5, 8, 11$
13.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg(\phi_1 \vee \phi_2)$	$\neg i$ 12

$\Rightarrow$: ψ hat die Form $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$. Der Wert von ψ ist abhängig von der Belegung von ϕ_1 und ϕ_2. Deshalb machen wir eine Fallunterscheidung.

1. ϕ_1 nimmt den Wert T und ϕ_2 nimmt den Wert T an. Folglich nimmt ψ den Wert T an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_2	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}, \phi_1$	$\vdash$	ϕ_2	Abschwächung 1
3.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\Rightarrow i$ 2

2. ϕ_1 nimmt den Wert F und ϕ_2 nimmt den Wert T an. Folglich nimmt ψ den Wert T an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ folgt. Beweis analog zu Fall 1.
3. ϕ_1 nimmt den Wert T und ϕ_2 nimmt den Wert F an. Folglich nimmt ψ den Wert F an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \neg(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	ϕ_1	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\phi_2$	Induktionsannahme
3.	$\mathcal{A}, \phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\vdash$	$\phi_1 \Rightarrow \phi_2$	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, \phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\vdash$	ϕ_1	Abschwächung 1
5.	$\mathcal{A}, \phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\vdash$	$\neg\phi_2$	Abschwächung 2
6.	$\mathcal{A}, \phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\vdash$	ϕ_2	$\Rightarrow e$ $3, 4$
7.	$\mathcal{A}, \phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\vdash$	$\perp$	$\neg e$ $5, 6$
8.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$	$\neg i$ 7

4. ϕ_1 nimmt den Wert F und ϕ_2 nimmt den Wert F an. Folglich nimmt ψ den Wert T an. Aus der Induktionsannahme folgt $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_1$ und $\mathcal{A} \vdash \neg\phi_2$. Nun ist zu zeigen, dass daraus $\mathcal{A} \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ folgt.

Zeilennr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Induktionsannahme
2.	$\mathcal{A}, \phi_1$	$\vdash$	$\neg\phi_1$	Abschwächung 1
3.	$\mathcal{A}, \phi_1$	$\vdash$	ϕ_1	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, \phi_1$	$\vdash$	$\bot$	$\neg e$ 2, 3
5.	$\mathcal{A}, \phi_1$	$\vdash$	ϕ_2	$\bot e$ 4
6.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\phi_1 \Rightarrow \phi_2$	$\Rightarrow i$ 5

□

Mit diesem Verfahren ermitteln wir den Beweis für $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi$ wie folgt. Zuerst stellen wir die Wahrheitstabelle auf, in der jede Zeile für $\mathcal{B} \Rightarrow \psi$ den Wert T enthält, da $\mathcal{B} \Rightarrow \psi$ eine Tautologie ist. Folglich erhalten wir für jede Zeile einen Beweis der Form $\mathcal{A}_l \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi$, wobei es für jede mögliche Belegung der atomaren Aussagen einen Beweis gibt. Nun müssen wir aus den 2^n Beweisen einen Beweis für $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi$ konstruieren. Das Verfahren soll nun exemplarisch für die Formel $p \wedge (q \vee \neg p)$ dargestellt werden. Aus der Wahrheitstabelle von $p \wedge (q \vee \neg p)$ ergeben sich folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} p, q &\vdash p \wedge (q \vee \neg p) \\ \neg p, q &\vdash p \wedge (q \vee \neg p) \\ p, \neg q &\vdash p \wedge (q \vee \neg p) \\ \neg p, \neg q &\vdash p \wedge (q \vee \neg p) \end{aligned}$$

Um die Prämissen zu eliminieren, wenden wir für jede atomare aussagenlogische Formel das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten (GdaD) an. Anschließend nutzen wir die Disjunktionsbeseitigung, um zu zeigen, dass aus allen Beweisen der einzelnen Zeilen der prämissenlosen Beweis der Formel folgt. Im weiteren gilt $\mathcal{A} = \emptyset$.

Znr.	Annahmemenge		Konklusion	Regel
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$p \vee \neg p$	GdaD
2.	$\mathcal{A}, p$	$\vdash$	$q \vee \neg q$	GdaD
3.	$\mathcal{A}, p, q$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	Zeilenbeweis
4.	$\mathcal{A}, p, \neg q$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	Zeilenbeweis
5.	$\mathcal{A}, p$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	$\vee e$ 2, 3, 4
6.	$\mathcal{A}, \neg p$	$\vdash$	$q \vee \neg q$	GdaD
7.	$\mathcal{A}, \neg p, q$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	Zeilenbeweis
8.	$\mathcal{A}, \neg p, \neg q$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	Zeilenbeweis
9.	$\mathcal{A}, \neg p$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	$\vee e$ 6, 7, 8
10.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	$\vee e$ 1, 5, 9

Dieses Verfahren funktioniert für jede Tautologie. Angewendet auf $\mathcal{B} \Rightarrow \psi$, liefert uns dieses Verfahren einen Beweis von $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi$.

3. Schritt Im letzten Schritt müssen wir zeigen, dass aus $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi \quad \mathcal{B} \vdash \psi$ folgt. Dies geschieht, in dem wir $\mathcal{B}$ als Prämisse annehmen und dann die $\Rightarrow e$ Regel auf $\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \psi$ anwenden. Dann erhalten wir einen Beweis für $\mathcal{B} \vdash \psi$.

Korollar 1. *Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von aussagenlogische Formeln, die wir als Prämissen bezeichnen. Sei ψ eine aussagenlogische Formel. Dann gilt: Wenn $\mathcal{B} \models \psi$ gilt, genau dann existiert ein Beweis für $\mathcal{B} \vdash \psi$.*

Durch die Korrektheit und die Vollständigkeit des Systems des natürlichen Schließens können wir beliebig zwischen der semantischen Betrachtungsweise und dem System des natürlichen Schließens wechseln. Z.B. können wir, um zu zeigen, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \psi$ semantisch gültig ist, einen Beweis für die Ableitung $\mathcal{A} \vdash \psi$ finden.

6 Quellen

1. Huth, Michael/Ryan, Mark: *Logic in Computer Science. Modelling and Reasoning about Systems.* Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

2. Laboreo, Daniel Clemente (2005): „Introduction to Natural Deduction“. URL: http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html [26.04.2009]

3. Wikipedia: „Natural Deduction“. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_deduction [26.04.2009]

7 Zum Ausprobieren

- Domino on Acid (http://www.winterdrache.de/freeware/domino/) ist ein Dominospiel, bei dem man Beweise im System des natürlichen Schließens konstruiert.