Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Gerwin Klein

WS 2001/2002
Übungsblatt 10
17. 12. 2001

# Übungen zur Semantik von Programmiersprachen

**Aufgabe 1** **(H)** *(Monotonie und Stetigkeit)*
**Abgabetermin: Montag, 7.1.2002**

Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ cpos. Eine Funktion $f : D \to E$ ist stetig, wenn für alle $\omega$-Ketten $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $D$ gilt:

$$f(\bigsqcup_i d_i) \sqsubseteq_E \bigsqcup_i f(d_i) \ \wedge\ \bigsqcup_i f(d_i) \sqsubseteq_E f(\bigsqcup_i d_i)$$

Zeigen Sie, daß eine der beiden Richtungen bereits gilt, wenn $f$ monoton ist.

**Aufgabe 2** **(H)** *(Partielle und totale Funktionen)*
**Abgabetermin: Montag, 7.1.2002**

Geben Sie eine bijektive Abbildung $\varphi$ zwischen der Menge der partiellen Funktionen $A \rightharpoonup B$ und der Menge der totalen Funktionen $A \to B_\perp$ an. Zeigen Sie, daß eine partielle Funktion genau dann in einer zweiten enthalten ist, wenn die entsprechenden totalen Funktionen punktweise geordnet sind, d.h. daß für alle $f_0, f_1 \in A \rightharpoonup B$ gilt

$$f_0 \subseteq f_1 \Leftrightarrow (\forall a \in A. (\varphi(f_0))(a) \sqsubseteq (\varphi(f_1))(a))\ .$$

**Aufgabe 3** **(H)** *(Kleinste Fixpunkte)*
**Abgabetermin: Montag, 7.1.2002**

Geben sei folgendes WHILE-Statement $w$:

$$\textbf{while}\ \neg(x = 1)\ \textbf{do}\ (y := y * x;\ x := x - 1)$$

(a) Geben Sie das Funktional $\Gamma$ zu $w$ an.
(b) Geben Sie (mit Beweis) den kleinsten Fixpunkt von $\Gamma$ an.
(c) Geben Sie (mit Beweis) einen weiteren Fixpunkt von $\Gamma$ an.

**Aufgabe 4** **(Ü)** *(Monotonie und Stetigkeit)*

Seien $D$ und $E$ cpos. Seien weiterhin alle $\omega$-Ketten in $D$ stationär, d.h. gelte für alle Folgen $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $D$

$$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N}. \forall m \geq N. d_m = d_N)\ .$$

Zeigen Sie, daß jede monotone Funktion von $D$ nach $E$ stetig ist.

**Aufgabe 5** **(Ü)** (*Vertauschung von lubs*)

Sei $g : \alpha \to \beta \to \gamma$ eine Funktion höherer Stufe ("Funktional") auf den pos $\alpha, \beta$ und der cpo $\gamma$. Sei weiterhin $g$ monoton im ersten und zweiten Argument, d.h.:

$$\begin{array}{ll} B1: & x_1 \sqsubseteq x_2 \Rightarrow g(x_1) \sqsubseteq g(x_2) \\ B2: & \forall x.\ y_1 \sqsubseteq y_2 \Rightarrow g(x)(y_1) \sqsubseteq g(x)(y_2) \end{array}$$

Beweisen Sie für beliebige $\omega$-Ketten $X = (X_j)_{j\in\omega}$ und $Y = (Y_i)_{i\in\omega}$ den folgenden Satz. (Vertauschungslemma)

$$\bigsqcup_{j\in\omega}\bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i) = \bigsqcup_{i\in\omega}\bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i)$$

Um Ihnen den Beweis zu erleichtern, sei folgender Hilfssatz für beliebige $\omega$-Ketten $C$ und $D$ gegeben:

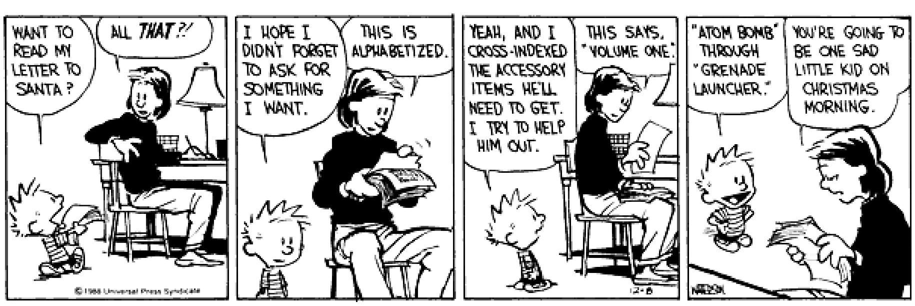
$$H: \quad (\forall i.\ C_i \sqsubseteq D_i) \Rightarrow \bigsqcup_{i\in\omega} C_i \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in\omega} D_i$$

Weiterhin seien folgende Ketteneigenschaften der Funktion $g$ bereits gezeigt:

$$\begin{array}{ll} K1: & (g(X_j)(Y_i))_{i\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette für alle } j \\ K2: & (g(X_j)(Y_i))_{j\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette für alle } i \\ K3: & (\bigsqcup_{j\in\omega} g(X_j)(Y_i))_{i\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette} \\ K4: & (\bigsqcup_{i\in\omega} g(X_j)(Y_i))_{j\in\omega} \text{ ist } \omega\text{-Kette} \end{array}$$

**Aufgabe 6** **(Ü)** (*Denotationelle Semantik von* **repeat**)

Erweitern Sie die denotationelle Semantik der Sprache WHILE um das **repeat**-Konstrukt. Prüfen Sie, ob die Semantik mit Ihrer Erweiterung weiterhin wohldefiniert ist.




*Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und ein gutes neues Jahr!*