

# Schranken für egalitäre Gewichte auf $\mathbb{Z}_m$

Steven Obua

15. April 2001

## 1 Was ist ein egalitäres Gewicht?

Sei  $\mathbb{Z}_m$  der Restklassenring ganzer Zahlen modulo  $m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 2$ . Die Elemente von  $\mathbb{Z}_m$  werden mit  $[x]$  bezeichnet, wobei  $x \in \mathbb{Z}$  ist. Bekanntlich gilt  $[x] = [y]$  für zwei Elemente aus  $\mathbb{Z}_m$  genau dann, wenn gilt:  $m$  teilt  $y-x$ . Dies wird auch  $m|y-x$  geschrieben. Eine andere Schreibweise für denselben Sachverhalt ist  $x \equiv y \pmod{m}$ , in Worten:  $x$  und  $y$  sind kongruent modulo  $m$ . Bei Honold [1] findet sich folgende Definition:

**Definition 1 (Egalitäres Gewicht)** *Ein egalitäres Gewicht auf  $\mathbb{Z}_m$  ist eine reellwertige Funktion*

$$\omega : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

**W1**  $\forall z \in \mathbb{Z}_m : \omega(z) \geq 0$ ,

**W2**  $\forall z \in \mathbb{Z}_m : \omega(z) = 0 \iff z = [0]$ ,

**W3**  $\forall z \in \mathbb{Z}_m : \omega(z) = \omega(-z)$ ,

**W4**  $\forall x, y \in \mathbb{Z}_m : \omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$

**E** *Es existiert  $\zeta \in \mathbb{R}$  (der Normierungsfaktor von  $\omega$ ), so dass für alle Untergruppen  $U, U \neq \{[0]\}$  von  $\mathbb{Z}_m$  gilt:*

$$\sum_{z \in U} \omega(z) = \zeta \cdot |U|.$$

Ist dabei  $\zeta = 1$ , so heisst  $\omega$  normiert.

Gilt ausserdem noch

**E<sub>A</sub>** *es existiert  $\zeta \in \mathbb{R}$ , so dass für alle Nebenklassen  $x+U$ ,  $x \in \mathbb{Z}_m$ ,  $U$  Untergruppe von  $\mathbb{Z}_m$ ,  $U \neq \{[0]\}$ , gilt:*

$$\sum_{z \in x+U} \omega(z) = \zeta,$$

so heisst  $\omega$  vollständig egalitär. Der Raum aller egalitären Gewichte auf  $\mathbb{Z}_m$  heisst  $\varepsilon(m)$ . Der Raum aller vollständig egalitären Gewichte auf  $\mathbb{Z}_m$  heisst  $\varepsilon_A(m)$ .

Jedes vollständig egalitäre Gewicht ist also ein egalitäres Gewicht, oder, anders ausgedrückt,  $\varepsilon_A(m) \subset \varepsilon(m)$ .

Der Einfachheit halber soll im weiteren der Ausdruck  $\omega([x])$ , mit  $\omega \in \varepsilon(m)$  und  $x \in \mathbb{Z}$ , einfacher geschrieben werden als  $\omega(x)$ .

**Beispiel 1** Es soll  $\varepsilon(2)$  bestimmt werden. Ist der Normierungsfaktor  $\zeta$  für ein  $\omega \in \varepsilon(m)$  gleich null, so ist  $\omega(z) = 0 \forall z \in \mathbb{Z}_m$ ,  $\omega$  muss dann also das Nullgewicht sein. Gilt  $\zeta \neq 0$ , so ist  $\frac{1}{\zeta}\omega$  ein normiertes Gewicht. Zur Bestimmung von  $\varepsilon(m)$  kann man sich daher darauf beschränken, alle *normierten* Gewichte aus  $\varepsilon(m)$  aufzuzählen. Sei nun also  $\omega$  ein normiertes Gewicht aus  $\varepsilon(2)$ . Nach **W1** und **W2** gilt  $\omega(0) = 0, \omega(1) \geq 0$ . **W3** greift für  $m = 2$  noch nicht, da  $[0] = -[0]$  und  $[1] = -[1]$  ist. Die beiden Untergruppen von  $\mathbb{Z}_2$  sind  $\{[0]\}$  und  $\{[0], [1]\}$ , **E** führt auf die Gleichung  $\omega(0) + \omega(1) = 2$ . Es kann also höchstens ein normiertes Gewicht in  $\varepsilon(2)$  geben:  $\omega(0) = 0, \omega(1) = 2$ . Dass dieses Gewicht auch **W4** genügt, lässt sich leicht überprüfen.

**Beispiel 2** Ist 6 ein Teiler von  $m$ , so enthält  $\varepsilon(m)$  nur das Nullgewicht. Denn sei  $\omega$  ein normiertes Gewicht aus  $\varepsilon(m)$ . Dann muss  $\omega$  wegen **W4** die Bedingung  $\omega(\frac{m}{3}) = \omega(\frac{m}{6} + \frac{m}{6}) \leq 2 \cdot \omega(\frac{m}{6})$  erfüllen. Gleichzeitig führt aber **E** zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\omega(0) + \omega(\frac{m}{2}) &= 2 \\ \omega(0) + \omega(\frac{m}{3}) + \omega(\frac{2m}{3}) &= 3 \\ \omega(0) + \omega(\frac{m}{6}) + \omega(\frac{m}{3}) + \omega(\frac{m}{2}) + \omega(\frac{2m}{3}) + \omega(\frac{5m}{6}) &= 6\end{aligned}$$

Wegen **W2** gilt nun  $\omega(0) = 0$ , wegen **W3** ist  $\omega(\frac{m}{3}) = \omega(\frac{2m}{3})$  und  $\omega(\frac{m}{6}) = \omega(\frac{5m}{6})$ . Aus dem obigen Gleichungssystem resultiert daher  $\omega(\frac{m}{6}) = \frac{1}{2}$  und  $\omega(\frac{m}{3}) = \frac{3}{2}$ . Aber es ist  $\frac{3}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2}$ , und dies ist ein Widerspruch zur obigen Bedingung.

## 2 Der Computer mischt mit

Sei nun  $\omega : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Was sind hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, dass  $\omega$  ein egalitäres Gewicht ist? Zur Formulierung dieser Bedingungen dient

**Definition 2** Für  $m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$ , ist die Abbildung  $\kappa_m : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$  definiert durch

$$\kappa_m(z) = \begin{cases} z & \text{falls } z \in \{[0], [1], \dots, [\lfloor \frac{m}{2} \rfloor]\} \\ -z & \text{sonst} \end{cases}$$

Geht  $m$  aus dem Kontext hervor, so wird im folgenden die Bezeichnung  $\kappa$  anstelle von  $\kappa_m$  verwendet. Desweiteren können in Ausdrücken wie  $\kappa([x])$  die eckigen Klammern weggelassen werden, es kann also auch einfach  $\kappa(x)$  stattdessen geschrieben werden.

Für  $\kappa$  gelten zwei offensichtliche, aber dennoch wichtige Eigenschaften:

$$\kappa(z) = \kappa(-z) \quad \forall z \in \mathbb{Z}_m, \quad (1)$$

$$\omega(\kappa(z)) = \omega(z) \quad \forall \omega \in \varepsilon(m), z \in \mathbb{Z}_m. \quad (2)$$

Die Unterscheidung zwischen Restklassen und ganzen Zahlen ist lästig, aber sie ist nützlich, um nicht durcheinander zu kommen, deshalb noch eine Vereinbarung: Die Funktion  $\tau_m : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}$  bildet eine Restklasse auf einen Repräsentanten der Restklasse ab, und zwar so, dass für alle  $z \in \mathbb{Z}_m$  die Ungleichungskette  $0 \leq \tau(z) < m$  gilt. Ist  $m$  klar, so schreibe ich auch hier immer einfach  $\tau$  anstelle von  $\tau_m$ .

Der folgende Satz bringt die Axiome für ein egalitäres Gewicht in eine Form, die geeigneter ist für die Berechnung von  $\varepsilon(m)$ .

**Satz 1** Seien  $x_1, \dots, x_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$  nichtnegative reelle Zahlen. Dann wird durch

$$\begin{aligned}\omega(0) &= 0, \\ \omega(i) &= x_{\tau(\kappa(i))} \quad \forall i = 1, \dots, m-1\end{aligned}$$

genau dann ein normiertes egalitäres Gewicht  $\omega \in \varepsilon(m)$  definiert, wenn gilt:

**I** Für alle echten positiven Teiler  $d$  von  $m$  gilt:

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{d}-1} x_{\tau(\kappa(d \cdot i))} = \frac{m}{d}$$

**II** Für alle  $a, b, c$  mit  $1 \leq a, b, c \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ,  $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $a = \tau(\kappa(b+c)) \vee a = \tau(\kappa(b-c))$ ,  $b \leq c$  gilt:

$$x_a \leq x_b + x_c.$$

Den analogen Sachverhalt für vollständig egalitäre normierte Gewichte erhält man, wenn **I** durch **I<sub>A</sub>** ersetzt wird:

**I<sub>A</sub>** Für alle echten positiven Teiler  $d$  von  $m$  und für alle  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq a < m$  gilt:

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{d}-1} x_{\tau(\kappa(a+d \cdot i))} = \frac{m}{d}.$$

Dabei ist  $x_0 = 0$  zu setzen.

Kurz: Zur Bestimmung aller  $\omega \in \varepsilon(m)$  löst man die in **I** und **II** aufgeführten Gleichungen und Ungleichungen in  $x_1, \dots, x_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ . Der Beweis ergibt sich geradewege aus den Definitionen unter Beachtung zweier Dinge:

- $\mathbb{Z}_m$  ist zyklisch von der Ordnung  $m$ , daher sind auch alle Untergruppen von  $\mathbb{Z}_m$  zyklisch von einer Ordnung, die  $m$  teilt.
- $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y) \iff \omega(\kappa(x+y)) \leq \omega(\kappa(x)) + \omega(\kappa(y))$ .

**Beispiel 3** Auf diese Weise wird nun  $\varepsilon(4)$  bestimmt. Die positiven echten Teiler von 4 sind 1 und 2, **I** liefert also:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_1 &= 4 \\ x_2 &= 2\end{aligned}$$

```

> taukappa := proc(m,n) min(n mod m, -n mod m): end:

> GlE := proc(x,m) local S,d,g,i: S:=[]: for d from 1 to m-1
do if (m mod d = 0) then g := 0: for i from 1 to m/d-1 do g :=
g+x[tau(kappa(m,d*i))] od: g := g = m/d: S := [op(S), g] fi: od:
{op(S)} end:

> GlVE := proc(x,m) local S,d,a,g,i,index: S:=[]: for d from
1 to m-1 do if (m mod d = 0) then for a from 0 to m-1 do g
:= 0: for i from 0 to m/d-1 do index := tau(kappa(m,a+d*i)):
if (index > 0) then g := g+x[index] fi od: g := g = m/d: S :=
[op(S), g] od fi: od: {op(S)} end:

> UG1 := proc(x,m) local S,M,a1,a2,b,c: S:= []: M :=
floor(m/2): for b from 1 to M do for c from b to M do a1 :=
tau(kappa(m,b+c)): if (a1 <> 0 and a1 <> b and a1 <> c) then
S := [op(S),x[a1] <= x[b]+x[c]] fi: a2 := tau(kappa(m,b-c)):
if (a2 <> 0 and a2 <> b and a2 <> c and a2 <> a1) then S :=
[op(S), x[a2]<=x[b]+x[c]] fi: od: od: {op(S)} end:

> Vars := proc(x,m) local S,i: S := []: for i from 1 to
floor(m/2) do S := [op(S),x[i]] od: {op(S)} end:

> BedE := proc(x,m) solve(GlE(x,m) union UG1(x,m),
Vars(x,m)) end:

> BedVE := proc(x,m) solve(GlVE(x,m) union UG1(x,m),
Vars(x,m)) end:

```

Abbildung 1: Satz 1 als Maple-Programm

**II** liefert die einzige Ungleichung

$$x_2 \leq x_1 + x_1.$$

Diese erhält man, indem man  $b$  und  $c$  die möglichen Werte zwischen 1 und 2 durchlaufen lässt und überprüft, ob  $\tau(\kappa(b+c))$  oder  $\tau(\kappa(b-c))$  ungleich 0,  $b$  und  $c$  sind. Die Lösung des obigen Systems von Gleichungen und Ungleichungen ist

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2, \end{aligned}$$

es gilt also

$$\varepsilon(4) = \{\zeta \cdot \omega \mid \zeta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \omega(0) = 0, \omega(1) = 1, \omega(2) = 2, \omega(3) = 1\}.$$

**Beispiel 4** Um  $\varepsilon(8)$  zu bestimmen, sind schon mehr Berechnungen notwendig. Deshalb ist es sinnvoll, diese Aufgabe dem Computer zu übergeben und die Berechnungen in einer Programmiersprache zu formulieren. In Abbildung 1 ist ein Maple-Programm (Maple V Release 4) dargestellt, dass folgende Definitionen enthält:

- >  $\text{GlE}(\mathbf{x}, 2), \text{UGl}(\mathbf{x}, 2), \text{BedE}(\mathbf{x}, 2);$   
 $\{x_1 = 2\}, \{\}, \{x_1 = 2\}$
- >  $\text{GlE}(\mathbf{x}, 4), \text{UGl}(\mathbf{x}, 4), \text{BedE}(\mathbf{x}, 4);$   
 $\{x_2 = 2, 2x_1 + x_2 = 4\}, \{x_2 \leq 2x_1\}, \{x_2 = 2, x_1 = 1\}$
- >  $\text{UGl}(\mathbf{x}, 8);$   
 $\{x_2 \leq 2x_1, x_4 \leq 2x_2, x_3 \leq x_1 + x_4, x_2 \leq x_1 + x_3, x_4 \leq x_1 + x_3, x_3 \leq x_1 + x_2,$   
 $x_1 \leq x_3 + x_4, x_1 \leq x_2 + x_3, x_2 \leq 2x_3\}$
- >  $\text{GlE}(\mathbf{x}, 8);$   
 $\{2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, 2x_2 + x_4 = 4, x_4 = 2\}$
- >  $\text{BedE}(\mathbf{x}, 8);$   
 $\{\frac{1}{2} \leq x_3, x_3 \leq \frac{3}{2}, x_4 = 2, x_2 = 1, x_1 = 2 - x_3\}$

Abbildung 2: Anwendung von GlE, UGl und BedE

**GlE** berechnet für ein gegebenes  $m$  die Menge der Gleichungen für ein egalitäres Gewicht nach Satz 1, Teil **I**,

**GlVE** berechnet die Menge der Gleichungen für ein vollständig egalitäres Gewicht nach Satz 1, Teil **IA**,

**UGl** berechnet die Menge der Ungleichungen nach Satz 1, Teil **II**,

**BedE** benutzt GlE und UGl, um die Gesamtheit aller Bedingungen für ein egalitäres Gewicht zu berechnen,

**BedVE** benutzt GlVE und UGl, um die Gesamtheit aller Bedingungen für ein vollständig egalitäres Gewicht zu berechnen.

In Abbildung 2 ist die Anwendung dieser Definitionen gezeigt. Sie bestätigt die Beispiele 1 und 3, und zeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon(8) = \{ \zeta \cdot \omega \mid & \omega(0) = 0, \omega(1) = 2 - p, \omega(2) = 1, \omega(3) = p, \\ & \omega(4) = 2, \omega(5) = p, \omega(6) = 1, \omega(7) = 2 - p, \\ & \frac{1}{2} \leq p \leq \frac{3}{2}, p \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}^{\geq 0} \} \end{aligned}$$

Die Menge der Ungleichungen aus Satz 1, Teil **II**, soll mit  $U_m$  bezeichnet werden ( $U_m$  kann durch die Funktion UGl aus dem vorangegangenen Beispiel berechnet werden). Wie leicht ersichtlich ist, folgt aus  $x_a \leq x_b + x_c \in U_m$ , wobei  $a, b$  und  $c$  paarweise verschieden sein sollen, dass auch  $x_b \leq x_a + x_c$  und  $x_c \leq x_a + x_b$

in  $U_m$  enthalten sind. Man kann daher zu jedem  $U_m$  eindeutig eine Menge  $U_m^{\text{reduziert}}$  konstruieren durch

$$U_m^{\text{reduziert}} = \{x_a \leq x_b + x_c \mid x_a \leq x_b + x_c \in U_m, (a \leq b \leq c) \text{ oder } b = c\}.$$

Für die Anzahl der Elemente von  $U_m^{\text{reduziert}}$  vermute ich folgende Formel:

$$|U_m^{\text{reduziert}}| = \begin{cases} 3q^2 + (3+r)q + r - 1 & \text{falls } r = 3 \\ 3q^2 + (3+r)q + r & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\text{wobei } m - 3 = q \cdot 6 + r, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 6.$$

Diese Formel ist durch den Computer für  $2 \leq m \leq 200$  bestätigt, Gegenbeispiele habe ich noch keine gefunden. Natürlich sind hierdurch auch obere und untere Schranken für  $|U_m|$  gegeben, da ja, wie sich aus der Konstruktion unmittelbar ergibt,  $|U_m^{\text{reduziert}}| \leq |U_m| \leq 3 \cdot |U_m^{\text{reduziert}}|$  gilt.

### 3 Das eigentliche Thema: Schranken

Aufgrund von Axiom **E** aus Definition 1 ist die Menge aller Werte, die normierte Gewichte aus  $\varepsilon(m)$  für ein bestimmtes  $m$  annehmen können, nach oben und nach unten beschränkt. Die triviale untere Schranke ist 0, eine offensichtliche obere Schranke ist  $m$  (tatsächlich ist sogar 2 eine obere Schranke, siehe [1]). Die Schranken, die im folgenden nun genauer untersucht werden sollen, sind definiert durch

$$\zeta_{\min}(m) = \inf\{\omega(x) \mid \omega \in \varepsilon(m), \omega \text{ normiert}, x \in \mathbb{Z}_m, x \neq [0]\},$$

$$\zeta_{\max}(m) = \sup\{\omega(x) \mid \omega \in \varepsilon(m), \omega \text{ normiert}, x \in \mathbb{Z}_m\},$$

$$\zeta_{\min}^i(m) = \inf\{\omega([i]) \mid \omega \in \varepsilon(m), \omega \text{ normiert}\},$$

$$\zeta_{\max}^i(m) = \sup\{\omega([i]) \mid \omega \in \varepsilon(m), \omega \text{ normiert}\}.$$

Analog werden die Schranken  $\zeta_{A,\min}$ ,  $\zeta_{A,\max}$ ,  $\zeta_{A,\min}^i$  und  $\zeta_{A,\max}^i$  für vollständig egalitäre Gewichte definiert, und mit diesen kann genauso verfahren werden wie im folgenden mit  $\zeta_{\min}$ ,  $\zeta_{\max}$ ,  $\zeta_{\min}^i$  und  $\zeta_{\max}^i$ .

Im Fall  $\varepsilon(m) = 0$  bzw.  $\varepsilon_A(m) = 0$  sind obige Definitionen natürlich nicht sinnvoll,  $m$  soll also von vornherein kein Vielfaches von 6 sein.

**Beispiel 5** Aus Beispiel 4 ist die Struktur von  $\varepsilon(8)$  bekannt. Es folgt sofort:

$$\begin{aligned} \zeta_{\min}(8) &= \frac{1}{2}, \quad \zeta_{\max}(8) = 2, \\ \zeta_{\min}^1(8) &= \zeta_{\min}^7(8) = \zeta_{\min}^3(8) = \zeta_{\min}^5(8) = \frac{1}{2}, \\ \zeta_{\max}^1(8) &= \zeta_{\max}^7(8) = \zeta_{\max}^3(8) = \zeta_{\max}^5(8) = \frac{3}{2}, \\ \zeta_{\min}^2(8) &= \zeta_{\min}^6(8) = 1, \quad \zeta_{\max}^2(8) = \zeta_{\max}^6(8) = 1, \\ &\quad \zeta_{\min}^4(8) = \zeta_{\max}^4(8) = 2. \end{aligned}$$

Für grössere  $m$  (schon  $m = 11$  stellt ein Problem dar) ist es allerdings nicht mehr praktikabel, sich zuerst einen Überblick über die normierten Gewichte mit Hilfe

von **BedE** zu verschaffen, und dann hieraus Folgerungen über die Schranken zu ziehen.

Ein effizienteres Verfahren nützt die Tatsache aus, dass  $\zeta_{\min}(m)$  bzw.  $\zeta_{\max}(m)$  durch  $\zeta_{\min}^i(m)$  bzw. durch  $\zeta_{\max}^i(m)$  ausgedrückt werden können:

$$\zeta_{\min}(m) = \min\{\zeta_{\min}^i(m) | 1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$$

$$\zeta_{\max}(m) = \max\{\zeta_{\max}^i(m) | 1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$$

Es reicht infolgedessen, sich um die Berechnung aller  $\zeta_{\min}^i(m)$  und  $\zeta_{\max}^i(m)$  zu kümmern. Wie aus Satz 1 ersichtlich ist, handelt es sich dabei um ein lineares Optimierungsproblem, die Bestimmung von  $\zeta_{\min}^i(m)$  bzw.  $\zeta_{\max}^i(m)$  kann wie folgt aufgefasst werden (die Gleichungen aus Satz 1, Teil **I**, werden dabei in Ungleichungen aufgesplittet, die Gleichung  $a = b$  wird also zu  $a \leq b$ ,  $b \leq a$ ):

minimiere bzw. maximiere  $x_i$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_{ij}x_j \leq b_i, \text{ für alle } i, 1 \leq i \leq n,$$

wobei es sich bei den  $a_{ij}$  und den  $b_i$  um Konstanten handelt, und unter den Nichtnegativitäts-Bedingungen

$$x_j \geq 0, \text{ für alle } j, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor.$$

Wird die Menge der Gleichungen aus Satz 1, Teil **I**, dabei mit  $G_m$  bezeichnet, so ergibt sich die Anzahl  $n$  der Ungleichungen des obigen Optimierungsproblems zu

$$n = 2 \cdot |G_m| + |U_m| = O(m^2).$$

### 3.1 Optimierung mit Maple

Aufbauend auf den Maple-Definitionen aus Beispiel 4 ist es sehr einfach, mit dem in Maple eingebauten Simplex-Verfahren zur linearen Optimierung zu ersten Schranken zu kommen. In Abbildung 3 ist beschrieben, wie zB.  $\zeta_{\min}^1(25)$  bzw.  $\zeta_{\max}^1(25)$  mit Hilfe von Maple nicht nur berechnet werden, sondern auch konkrete Instanzierungen der  $x_i$  vorgeschlagen werden, die das Problem minimieren bzw. maximieren:

$$\zeta_{\min}^1(25) = \frac{1}{6}, \quad \zeta_{\max}^1(25) = \frac{25}{13}.$$

Wie man sich überzeugen kann, indem man auf die gleiche Weise  $\zeta_{\min}^i(25)$  und  $\zeta_{\max}^i(25)$ ,  $2 \leq i \leq 12$ , berechnet, gilt überdies hinaus sogar

$$\zeta_{\min}(25) = \zeta_{\min}^1(25) = \frac{1}{6}, \quad \zeta_{\max}(25) = \zeta_{\max}^1(25) = \frac{25}{13}.$$

```

> with(simplex):
> zetamin_i := proc(i,m) local x: minimize(x[i], GLE(x, m)
union UG1(x,m),NONNEGATIVE) end:
> zetamax_i := proc(i,m) local x: maximize(x[i], GLE(x, m)
union UG1(x,m),NONNEGATIVE) end:
> zetamin_i(1,25);
{ $x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{2}, x_{11} = \frac{19}{12}, x_{12} = \frac{7}{4}, x_6 = 1, x_7 = \frac{7}{6}, x_9 = \frac{3}{2}, x_{10} = \frac{5}{3}, x_4 = \frac{2}{3},$ 
 $x_5 = \frac{5}{6}, x_8 = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{1}{6}$ }
> zetamax_i(1, 25);
{ $x_{10} = \frac{25}{26}, x_{11} = \frac{25}{26}, x_5 = \frac{20}{13}, x_2 = \frac{5}{13}, x_3 = \frac{20}{13}, x_{12} = \frac{25}{26}, x_1 = \frac{25}{13}, x_8 = \frac{10}{13},$ 
 $x_9 = \frac{15}{13}, x_6 = \frac{10}{13}, x_7 = \frac{15}{13}, x_4 = \frac{5}{13}$ }

```

Abbildung 3: Berechnung von  $\zeta_{\min}^1(25)$  und  $\zeta_{\max}^1(25)$  mit Maple

```

m=10 -----
w[1]:
min=[w[1] = 1/2, w[2] = 1, w[3] = 1, w[4] = 3/2, w[5] = 2]
max=[w[1] = 1, w[2] = 3/2, w[3] = 1/2, w[4] = 1, w[5] = 2]
between 1/2 and 1
w[2]:
min=[w[1] = 1/2, w[2] = 1, w[3] = 1, w[4] = 3/2, w[5] = 2]
max=[w[1] = 1, w[2] = 3/2, w[3] = 1/2, w[4] = 1, w[5] = 2]
between 1 and 3/2
w[3]:
min=[w[1] = 1, w[2] = 3/2, w[3] = 1/2, w[4] = 1, w[5] = 2]
max=[w[1] = 1/2, w[2] = 1, w[3] = 1, w[4] = 3/2, w[5] = 2]
between 1/2 and 1
w[4]:
min=[w[1] = 1, w[2] = 3/2, w[3] = 1/2, w[4] = 1, w[5] = 2]
max=[w[1] = 1/2, w[2] = 1, w[3] = 1, w[4] = 3/2, w[5] = 2]
between 1 and 3/2
w[5]:
min=[w[1] = 1/2, w[2] = 1, w[3] = 1, w[4] = 3/2, w[5] = 2]
max=[w[1] = 1/2, w[2] = 1, w[3] = 1, w[4] = 3/2, w[5] = 2]
between 2 and 2

```

Abbildung 4: Resultate für  $\zeta_{\min}^i(10)$  und  $\zeta_{\max}^i(10)$ ,  $i = 1 \dots 5$ , mit *WeightDevil*

## 3.2 Optimierung mit *WeightDevil*

Um für möglichst grosse  $m$  Schranken zu ermitteln, ist es notwendig, das Programm in einer schnelleren Programmiersprache als Maple zu erstellen. *WeightDevil* ist ein solches Programm. Es ist in C++ geschrieben und lässt sich sowohl mit dem Gnu-C++ Compiler, als auch mit dem Microsoft C++ 6.0 Compiler übersetzen. Um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten, sind dabei die Berechnungen für Ganzzahl-Arithmetik mit Überlaufüberprüfungen versehen (was unter Microsoft C++ nur unter der Verwendung von Assembler-Code möglich war, sorry :-)). Das Programm ist darüber hinaus in der Lage, bereits berechnete Resultate in einer Datei abzuspeichern, und auch zur weiteren Verwendung wieder auszulesen, so dass eine Unterbrechung des Programms und eine Wiederaufnahme der Berechnungen zu einem späteren Zeitpunkt möglich ist. Ein Auszug aus der Datei für den Fall  $m = 10$  findet sich in Abbildung 4. Der im Programm verwendete Simplex-Algorithmus zur linearen Optimierung ist ausführlich beschrieben in [2].

## 3.3 Experimentelle Resultate

In diesem Abschnitt werden die Resultate zusammengetragen, die durch die experimentelle Arbeit mit *WeightDevil* entstanden sind. Daher hat hier der Ausdruck *für alle  $m$*  eine der normalen Interpretation gegenüber stark abgeschwächte Bedeutung, nämlich: Für alle  $m \in \mathbb{Z}, 2 \leq m$ , für die experimentelle Daten vorliegen. In diesem Sinne sind die folgenden Aussagen zu verstehen.

Die Daten, auf denen die Aussagen basieren, sind in den Abbildungen 5 bis 10 und 11 bis 15 zusammengefasst. Der Aufbau der Daten soll anhand der Tabelle in Abbildung 5 erklärt werden. In jeder Tabellenzeile sind die Daten für ein spezifisches  $m$  zusammengetragen. In der ersten Spalte steht dabei  $m$  selber. In der zweiten Spalte stehen die Werte für  $\zeta_{\min}(m)$  und  $\zeta_{\max}(m)$ . Ist  $m$  nicht fettgedruckt, so können diese Werte in der zweiten Spalte nur dann als zuverlässig angesehen werden, wenn sich Aussage 2 als wahr erweist. Ist  $m$  fettgedruckt, so sind  $\zeta_{\min}(m)$  und  $\zeta_{\max}(m)$  ohne Verwendung von Aussage 2 berechnet worden. In der dritten Spalte stehen die Werte von  $\zeta_{\min}^i(m)$  und  $\zeta_{\max}^i(m)$  für repräsentative  $i$  (repräsentativ im Sinne von Aussage 2). Fettdruck in der dritten Spalte bedeutet, dass der Wert mit den Werten aus Spalte 2 übereinstimmt. Im Falle  $m = 15$  lässt sich folgender Sachverhalt aus Abbildung 2 ablesen:

$$\begin{aligned}\zeta_{\min}^1(15) &= \frac{3}{10}, & \zeta_{\max}^1(15) &= \frac{3}{2}, \\ \zeta_{\min}^3(15) &= \frac{5}{6}, & \zeta_{\max}^3(15) &= \frac{5}{3}, \\ \zeta_{\min}^5(15) &= \frac{3}{2}, & \zeta_{\max}^5(15) &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Da 15 fettgedruckt ist, weiss man weiterhin noch sicher:

$$\begin{aligned}\zeta_{\min}(15) &= \frac{3}{10}, \quad \zeta_{\max}(15) = \frac{5}{3}, \\ \zeta_{\min}^1(15) &= \zeta_{\min}^2(15) = \zeta_{\min}^4(15) = \zeta_{\min}^7(15), \\ \zeta_{\max}^1(15) &= \zeta_{\max}^2(15) = \zeta_{\max}^4(15) = \zeta_{\max}^7(15), \\ \zeta_{\min}^3(15) &= \zeta_{\min}^6(15), \\ \zeta_{\max}^3(15) &= \zeta_{\max}^6(15).\end{aligned}$$

**Aussage 1** Für alle  $m$ , die keine Vielfachen von 6 sind, gilt sowohl  $\varepsilon(m) \neq 0$  als auch  $\varepsilon_A(m) \neq 0$ , für solche  $m$  existieren also normierte egalitäre und vollständig egalitäre Gewichte.

**Aussage 2** Für alle  $m$ ,  $6 \nmid m$ , gilt: Ist  $\text{ggt}(i, m) = \text{ggt}(j, m)$ , so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\zeta_{\min}^i(m) &= \zeta_{\min}^j(m), \\ \zeta_{\max}^i(m) &= \zeta_{\max}^j(m), \\ \zeta_{A, \min}^i(m) &= \zeta_{A, \min}^j(m), \\ \zeta_{A, \max}^i(m) &= \zeta_{A, \max}^j(m).\end{aligned}$$

Eine Anwendung dieser Aussage ergibt sich sofort: Die Menge  $\{1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$  zerfällt in Äquivalenzklassen, so dass alle Elemente einer Äquivalenzklasse den gleichen grössten gemeinsamen Teiler mit  $m$  besitzen. Um nun etwa alle  $\zeta_{\min}^i(m)$  zu berechnen, muss  $\zeta_{\min}^i(m)$  nur für jeweils einen Repräsentanten jeder dieser Äquivalenzklassen berechnet werden, was natürlich eine grosse Rechenersparnis bedeuten würde.

Ist man ausserdem nur an etwa  $\zeta_{\min}(m)$  interessiert, so würde die folgende Aussage die Rechnung noch weiter vereinfachen:

**Aussage 3** Für alle  $m$ ,  $6 \nmid m$ , gilt:

$$\begin{aligned}\zeta_{\min}(m) &= \zeta_{\min}^1(m), \\ \zeta_{A, \min}(m) &= \zeta_{A, \min}^1(m).\end{aligned}$$

Ist  $m$  ungerade, so hat man zusätzlich:

$$\begin{aligned}\zeta_{\max}(m) &= \zeta_{\max}^1(m), \\ \zeta_{A, \max}(m) &= \zeta_{A, \max}^1(m).\end{aligned}$$

Würden sich die beiden folgenden Aussagen bewahrheiten, so wäre dies sehr erfreulich:

**Aussage 4** Für alle  $m$ ,  $6 \nmid m$ , gilt: Ist  $m$  gerade und kein Vielfaches von 70, so gilt:

$$\zeta_{\min}(m) = \zeta_{A, \min}(m) = \frac{2}{\phi(m)}.$$

**Aussage 5** Für alle  $m$ ,  $6 \nmid m$ , gilt: Ist  $m$  ein Vielfaches von 3, so gilt:

$$\zeta_{\min}(m) = \frac{9}{2 \cdot m}.$$

Mit Hilfe des Lee-Gewichts bereits in [1] bewiesen ist

**Aussage 6** Für alle Primzahlen  $p$ ,  $p \neq 2$ , gilt:

$$\zeta_{\min}(p) = \zeta_{A,\min}(p) = \frac{4p}{p^2 - 1},$$
$$\zeta_{\max}(p) = \zeta_{A,\max}(p) = \frac{2p}{p + 1}.$$

## Literatur

- [1] Thomas Honold. *Lineare Codes über endlichen Ringen*
- [2] Louis Brickmann. *Mathematical Introduction to Linear Programming and Game Theory*

$m$	$\zeta_{\min}, \zeta_{\max}$	
<b>2</b>	2, 2	1 <b>2, 2</b>
<b>3</b>	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	1 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
<b>4</b>	1, 2	1      2 <b>1, 1      2, 2</b>
<b>5</b>	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$	1 $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$
<b>7</b>	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$	1 $\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$
<b>8</b>	$\frac{1}{2}, 2$	1      2      4 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 1, 1 <b>2, 2</b>
<b>9</b>	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1      3 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
<b>10</b>	$\frac{1}{2}, 2$	1      2      5 $\frac{1}{2}, 1$ $1, \frac{3}{2}$ <b>2, 2</b>
<b>11</b>	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	1 $\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$
<b>13</b>	$\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$	1 $\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$
<b>14</b>	$\frac{1}{3}, 2$	1      2      7 $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$ <b>2, 2</b>
<b>15</b>	$\frac{3}{10}, \frac{5}{3}$	1      3      5 $\frac{3}{10}, \frac{3}{2}$ $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
<b>16</b>	$\frac{1}{4}, 2$	1      2      4      8 $\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 1, 1 <b>2, 2</b>
<b>17</b>	$\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$	1 $\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$
<b>19</b>	$\frac{19}{90}, \frac{19}{10}$	1 $\frac{19}{90}, \frac{19}{10}$

Abbildung 5: Schranken egalitärer Gewichte,  $m = 2, \dots, 19$

$m$	$\zeta_{\min}, \zeta_{\max}$					
<b>20</b>	$\frac{1}{4}, 2$	1	2	4	5	10
		$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>21</b>	$\frac{3}{14}, \frac{38}{21}$	1	3	7		
		$\frac{3}{14}, \frac{38}{21}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>22</b>	$\frac{1}{5}, 2$	1	2	11		
		$\frac{1}{5}, \frac{29}{18}$	$\frac{7}{18}, \frac{9}{5}$	<b>2, 2</b>		
<b>23</b>	$\frac{23}{132}, \frac{23}{12}$	1				
		$\frac{23}{132}, \frac{23}{12}$				
<b>25</b>	$\frac{1}{6}, \frac{25}{13}$	1	5			
		$\frac{1}{6}, \frac{25}{13}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$			
<b>26</b>	$\frac{1}{6}, 2$	1	2	13		
		$\frac{1}{6}, \frac{57}{34}$	$\frac{11}{34}, \frac{11}{6}$	<b>2, 2</b>		
<b>27</b>	$\frac{1}{6}, \frac{36}{19}$	1	3	9		
		$\frac{1}{6}, \frac{36}{19}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>28</b>	$\frac{1}{6}, 2$	1	2	4	7	14
		$\frac{1}{6}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>29</b>	$\frac{29}{210}, \frac{29}{15}$	1				
		$\frac{29}{210}, \frac{29}{15}$				
<b>31</b>	$\frac{31}{240}, \frac{31}{16}$	1				
		$\frac{31}{240}, \frac{31}{16}$				
<b>32</b>	$\frac{1}{8}, 2$	1	2	4	8	16
		$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>33</b>	$\frac{3}{22}, \frac{36}{19}$	1	3	11		
		$\frac{3}{22}, \frac{36}{19}$	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>34</b>	$\frac{1}{8}, 2$	1	2	17		
		$\frac{1}{8}, \frac{58}{33}$	$\frac{8}{33}, \frac{15}{8}$	<b>2, 2</b>		
<b>35</b>	$\frac{5}{42}, \frac{23}{12}$	1	5	7		
		$\frac{5}{42}, \frac{23}{12}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$		
<b>37</b>	$\frac{37}{342}, \frac{37}{19}$	1				
		$\frac{37}{342}, \frac{37}{19}$				

Abbildung 6: Schranken egalitärer Gewichte,  $m = 20, \dots, 37$

$m$	$\zeta_{\min}, \zeta_{\max}$							
<b>38</b>	$\frac{1}{9}, 2$	1	2	19				
		$\frac{1}{9}, \frac{91}{51}$	$\frac{11}{51}, \frac{17}{9}$	<b>2, 2</b>				
<b>39</b>	$\frac{3}{26}, \frac{86}{45}$	1	3	13				
		$\frac{3}{26}, \frac{86}{45}$	$\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$				
<b>40</b>	$\frac{1}{8}, 2$	1	2	4	5	8	10	20
		$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>41</b>	$\frac{41}{420}, \frac{41}{21}$	1						
		$\frac{41}{420}, \frac{41}{21}$						
<b>43</b>	$\frac{43}{462}, \frac{43}{22}$	1						
		$\frac{43}{462}, \frac{43}{22}$						
<b>44</b>	$\frac{1}{10}, 2$	1	2	4	11	22		
		$\frac{1}{10}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{5}, \frac{29}{18}$	$\frac{7}{18}, \frac{9}{5}$	1, 1	<b>2, 2</b>		
<b>45</b>	$\frac{1}{10}, \frac{25}{13}$	1	3	5	9	15		
		$\frac{1}{10}, \frac{25}{13}$	$\frac{3}{10}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>46</b>	$\frac{1}{11}, 2$	1	2	23				
		$\frac{1}{11}, \frac{299}{164}$	$\frac{29}{164}, \frac{21}{11}$	<b>2, 2</b>				
<b>47</b>	$\frac{47}{552}, \frac{47}{24}$	1						
		$\frac{47}{552}, \frac{47}{24}$						
<b>49</b>	$\frac{1}{12}, \frac{49}{25}$	1	7					
		$\frac{1}{12}, \frac{49}{25}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$					
<b>50</b>	$\frac{1}{10}, 2$	1	2	5	10	25		
		$\frac{1}{10}, \frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{2}, 1$	$1, \frac{3}{2}$	<b>2, 2</b>		
<b>51</b>	$\frac{3}{34}, \frac{126}{65}$	1	3	17				
		$\frac{3}{34}, \frac{126}{65}$	$\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$				
<b>52</b>	$\frac{1}{12}, 2$	1	2	4	13	26		
		$\frac{1}{12}, \frac{23}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{57}{34}$	$\frac{11}{34}, \frac{11}{6}$	1, 1	<b>2, 2</b>		
<b>53</b>	$\frac{53}{702}, \frac{53}{27}$	1						
		$\frac{53}{702}, \frac{53}{27}$						
<b>55</b>	$\frac{5}{66}, \frac{218}{111}$	1	5	11				
		$\frac{5}{66}, \frac{218}{111}$	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$				

Abbildung 7: Schranken egalitärer Gewichte,  $m = 38, \dots, 55$

$m$	$\zeta_{\min}, \zeta_{\max}$								
56	$\frac{1}{12}, 2$	1	2	4	7	8	14	28	
		$\frac{1}{12}, \frac{23}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	1, 1	<b>2, 2</b>	
57	$\frac{3}{38}, \frac{134}{69}$	1	3	19					
		$\frac{3}{38}, \frac{134}{69}$	$\frac{19}{90}, \frac{19}{10}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$					
58	$\frac{1}{14}, 2$	1	2	29					
		$\frac{1}{14}, \frac{307}{165}$	$\frac{23}{165}, \frac{27}{14}$	<b>2, 2</b>					
59	$\frac{59}{870}, \frac{59}{30}$	1							
		$\frac{59}{870}, \frac{59}{30}$							
61	$\frac{61}{930}, \frac{61}{31}$	1							
		$\frac{61}{930}, \frac{61}{31}$							
62	$\frac{1}{15}, 2$	1	2	31					
		$\frac{1}{15}, \frac{402}{215}$	$\frac{28}{215}, \frac{29}{15}$	<b>2, 2</b>					
63	$\frac{1}{14}, \frac{113}{58}$	1	3	7	9	21			
		$\frac{1}{14}, \frac{113}{58}$	$\frac{3}{14}, \frac{38}{21}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			
64	$\frac{1}{16}, 2$	1	2	4	8	16	32		
		$\frac{1}{16}, \frac{31}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>		
65	$\frac{5}{78}, \frac{65}{33}$	1	5	13					
		$\frac{5}{78}, \frac{65}{33}$	$\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$					
68	$\frac{1}{16}, 2$	1	2	4	17	34			
		$\frac{1}{16}, \frac{31}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{58}{33}$	$\frac{8}{33}, \frac{15}{8}$	1, 1	<b>2, 2</b>			
69	$\frac{3}{46}, \frac{45}{23}$	1	3	23					
		$\frac{3}{46}, \frac{45}{23}$	$\frac{23}{132}, \frac{23}{12}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$					
70	$\frac{1}{10}, 2$	1	2	5	7	10	14	35	
		$\frac{1}{10}, \frac{13}{7}$	$\frac{1}{7}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	1, $\frac{3}{2}$	<b>2, 2</b>	
74	$\frac{1}{18}, 2$	1	2	37					
		$\frac{1}{18}, \frac{1373}{726}$	$\frac{79}{726}, \frac{35}{18}$	<b>2, 2</b>					
75	$\frac{3}{50}, \frac{166}{85}$	1	3	5	15	25			
		$\frac{3}{50}, \frac{166}{85}$	$\frac{1}{6}, \frac{25}{13}$	$\frac{3}{10}, \frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			
76	$\frac{1}{18}, 2$	1	2	4	19	38			
		$\frac{1}{18}, \frac{35}{18}$	$\frac{1}{9}, \frac{91}{51}$	$\frac{11}{51}, \frac{17}{9}$	1, 1	<b>2, 2</b>			

Abbildung 8: Schranken egalitärer Gewichte,  $m = 56, \dots, 76$

$m$	$\zeta_{\min}, \zeta_{\max}$									
77	$\frac{7}{132}, \frac{77}{39}$	1	7	11						
		$\frac{7}{132}, \frac{77}{39}$	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$						
80	$\frac{1}{16}, 2$	1	2	4	5	8	10	16	20	40
		$\frac{1}{16}, \frac{31}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	2, 2
81	$\frac{1}{18}, \frac{63}{32}$	1	3	9	27					
		$\frac{1}{18}, \frac{63}{32}$	$\frac{1}{6}, \frac{36}{19}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$					
82	$\frac{1}{20}, 2$	1	2	41						
		$\frac{1}{20}, \frac{892}{469}$	$\frac{46}{469}, \frac{39}{20}$	2, 2						
85	$\frac{5}{102}, \frac{85}{43}$	1	5	17						
		$\frac{5}{102}, \frac{85}{43}$	$\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$						
86	$\frac{1}{21}, 2$	1	2	43						
		$\frac{1}{21}, \frac{1081}{567}$	$\frac{53}{567}, \frac{41}{21}$	2, 2						
87	$\frac{3}{58}, \frac{234}{119}$	1	3	29						
		$\frac{3}{58}, \frac{234}{119}$	$\frac{253}{1832}, \frac{29}{15}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$						
88	$\frac{1}{20}, 2$	1	2	4	8	11	22	44		
		$\frac{1}{20}, \frac{39}{20}$	$\frac{1}{10}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{5}, \frac{29}{18}$	$\frac{7}{18}, \frac{9}{5}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	2, 2		
91	$\frac{7}{156}, \frac{91}{46}$	1	7	13						
		$\frac{7}{156}, \frac{91}{46}$	$\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$						
92	$\frac{1}{22}, 2$	1	2	4	23	46				
		$\frac{1}{22}, \frac{43}{22}$	$\frac{1}{11}, \frac{299}{164}$	$\frac{29}{164}, \frac{21}{11}$	1, 1	2, 2				
93	$\frac{3}{62}, \frac{230}{117}$	1	3	31						
		$\frac{3}{62}, \frac{230}{117}$	$\frac{50}{387}, \frac{31}{16}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$						
94	$\frac{1}{23}, 2$	1	2	47						
		$\frac{1}{23}, \frac{2711}{1416}$	$\frac{121}{1416}, \frac{45}{23}$	2, 2						
95	$\frac{5}{114}, \frac{95}{48}$	1	5	19						
		$\frac{5}{114}, \frac{95}{48}$	$\frac{19}{90}, \frac{19}{10}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$						
98	$\frac{1}{21}, 2$	1	2	7	14	49				
		$\frac{1}{21}, \frac{40}{21}$	$\frac{2}{21}, \frac{41}{21}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	2, 2				
99	$\frac{1}{22}, \frac{156}{79}$	1	3	9	11	33				
		$\frac{1}{22}, \frac{156}{79}$	$\frac{3}{22}, \frac{36}{19}$	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$				

Abbildung 9: Schranken egalitärer Gewichte,  $m = 77, \dots, 99$

$m$	$\zeta_{\min}, \zeta_{\max}$											
100	$\frac{1}{20}, 2$	1	2	4	5	10	20	25	50			
		$\frac{1}{20}, \frac{39}{20}$	$\frac{1}{10}, \frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>			
104	$\frac{1}{24}, 2$	1	2	4	8	13	26	52				
		$\frac{1}{24}, \frac{47}{24}$	$\frac{1}{12}, \frac{23}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{57}{34}$	$\frac{11}{34}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>				
140	$\frac{1}{20}, 2$	1	2	4	5	7	10	14	20	28	35	70
		$\frac{1}{20}, \frac{39}{20}$	$\frac{1}{10}, \frac{13}{7}$	$\frac{1}{7}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{6}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>

Abbildung 10: Schranken egalitärer Gewichte,  $m = 100, \dots, 140$

$m$	$\zeta_{A,\min}, \zeta_{A,\max}$	
<b>2</b>	2, 2	1 <b>2, 2</b>
<b>3</b>	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	1 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
<b>4</b>	1, 2	1      2 <b>1, 1      2, 2</b>
<b>5</b>	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$	1 $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$
<b>7</b>	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$	1 $\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$
<b>8</b>	$\frac{1}{2}, 2$	1      2      4 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 1, 1 <b>2, 2</b>
<b>9</b>	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1      3 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
<b>10</b>	$\frac{1}{2}, 2$	1      2      5 $\frac{1}{2}, 1$ $1, \frac{3}{2}$ <b>2, 2</b>
<b>11</b>	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	1 $\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$
<b>13</b>	$\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$	1 $\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$
<b>14</b>	$\frac{1}{3}, 2$	1      2      7 $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$ <b>2, 2</b>
<b>15</b>	$\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$	1      3      5 $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ $1, \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
<b>16</b>	$\frac{1}{4}, 2$	1      2      4      8 $\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 1, 1 <b>2, 2</b>
<b>17</b>	$\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$	1 $\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$
<b>19</b>	$\frac{19}{90}, \frac{19}{10}$	1 $\frac{19}{90}, \frac{19}{10}$

Abbildung 11: Schranken vollständig egalitärer Gewichte,  $m = 2, \dots, 19$

$m$	$\zeta_{A,\min}, \zeta_{A,\max}$					
<b>20</b>	$\frac{1}{4}, 2$	1	2	4	5	10
		$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>21</b>	$\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$	1	3	7		
		$\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>22</b>	$\frac{1}{5}, 2$	1	2	11		
		$\frac{1}{5}, \frac{29}{18}$	$\frac{7}{18}, \frac{9}{5}$	<b>2, 2</b>		
<b>23</b>	$\frac{23}{132}, \frac{23}{12}$	1				
		$\frac{23}{132}, \frac{23}{12}$				
<b>25</b>	$\frac{1}{6}, \frac{25}{13}$	1	5			
		$\frac{1}{6}, \frac{25}{13}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$			
<b>26</b>	$\frac{1}{6}, 2$	1	2	13		
		$\frac{1}{6}, \frac{57}{34}$	$\frac{11}{34}, \frac{11}{6}$	<b>2, 2</b>		
<b>27</b>	$\frac{1}{6}, \frac{3}{2}$	1	3	9		
		$\frac{1}{6}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>28</b>	$\frac{1}{6}, 2$	1	2	4	7	14
		$\frac{1}{6}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>29</b>	$\frac{29}{210}, \frac{29}{15}$	1				
		$\frac{29}{210}, \frac{29}{15}$				
<b>31</b>	$\frac{31}{240}, \frac{31}{16}$	1				
		$\frac{31}{240}, \frac{31}{16}$				
<b>32</b>	$\frac{1}{8}, 2$	1	2	4	8	16
		$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>
<b>33</b>	$\frac{1}{7}, \frac{3}{2}$	1	3	11		
		$\frac{1}{7}, \frac{3}{2}$	$\frac{5}{12}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
<b>34</b>	$\frac{1}{8}, 2$	1	2	17		
		$\frac{1}{8}, \frac{58}{33}$	$\frac{8}{33}, \frac{15}{8}$	<b>2, 2</b>		
<b>35</b>	$\frac{1}{8}, \frac{19}{10}$	1	5	7		
		$\frac{1}{8}, \frac{19}{10}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$		
<b>37</b>	$\frac{37}{342}, \frac{37}{19}$	1				
		$\frac{37}{342}, \frac{37}{19}$				

Abbildung 12: Schranken vollständig egalitärer Gewichte,  $m = 20, \dots, 37$

$m$	$\zeta_{A,\min}, \zeta_{A,\max}$							
38	$\frac{1}{9}, 2$	1	2	19				
		$\frac{1}{9}, \frac{91}{51}$	$\frac{11}{51}, \frac{17}{9}$	<b>2, 2</b>				
39	$\frac{1}{8}, \frac{3}{2}$	1	3	13				
		$\frac{1}{8}, \frac{3}{2}$	$\frac{7}{20}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$				
40	$\frac{1}{8}, 2$	1	2	4	5	8	10	20
		$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>
41	$\frac{41}{420}, \frac{41}{21}$	1						
		$\frac{41}{420}, \frac{41}{21}$						
43	$\frac{43}{462}, \frac{43}{22}$	1						
		$\frac{43}{462}, \frac{43}{22}$						
44	$\frac{1}{10}, 2$	1	2	4	11	22		
		$\frac{1}{10}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{5}, \frac{29}{18}$	$\frac{7}{18}, \frac{9}{5}$	1, 1	<b>2, 2</b>		
45	$\frac{1}{9}, \frac{3}{2}$	1	3	5	9	15		
		$\frac{1}{9}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$		
46	$\frac{1}{11}, 2$	1	2	23				
		$\frac{1}{11}, \frac{299}{164}$	$\frac{29}{164}, \frac{21}{11}$	<b>2, 2</b>				
47	$\frac{47}{552}, \frac{47}{24}$	1						
		$\frac{47}{552}, \frac{47}{24}$						
49	$\frac{1}{12}, \frac{49}{25}$	1	7					
		$\frac{1}{12}, \frac{49}{25}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$					
50	$\frac{1}{10}, 2$	1	2	5	10	25		
		$\frac{1}{10}, \frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{2}, 1$	$1, \frac{3}{2}$	<b>2, 2</b>		
51	$\frac{1}{11}, \frac{3}{2}$	1	3	17				
		$\frac{1}{11}, \frac{3}{2}$	$\frac{4}{15}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$				
52	$\frac{1}{12}, 2$	1	2	4	13	26		
		$\frac{1}{12}, \frac{23}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{57}{34}$	$\frac{11}{34}, \frac{11}{6}$	1, 1	<b>2, 2</b>		
53	$\frac{53}{702}, \frac{53}{27}$	1						
		$\frac{53}{702}, \frac{53}{27}$						
55	$\frac{1}{12}, \frac{49}{25}$	1	5	11				
		$\frac{1}{12}, \frac{49}{25}$	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$				

Abbildung 13: Schranken vollständig egalitärer Gewichte,  $m = 38, \dots, 55$

$m$	$\zeta_{A,\min}, \zeta_{A,\max}$								
56	$\frac{1}{12}, 2$	1	2	4	7	8	14	28	
		$\frac{1}{12}, \frac{23}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{11}{6}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	1, 1	<b>2, 2</b>	
57	$\frac{1}{12}, \frac{3}{2}$	1	3	19					
		$\frac{1}{12}, \frac{3}{2}$	$\frac{5}{21}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$					
58	$\frac{1}{14}, 2$	1	2	29					
		$\frac{1}{14}, \frac{307}{165}$	$\frac{23}{165}, \frac{27}{14}$	<b>2, 2</b>					
59	$\frac{59}{870}, \frac{59}{30}$	1							
		$\frac{59}{870}, \frac{59}{30}$							
62	$\frac{1}{15}, 2$	1	2	31					
		$\frac{1}{15}, \frac{402}{215}$	$\frac{28}{215}, \frac{29}{15}$	<b>2, 2</b>					
63	$\frac{1}{12}, \frac{3}{2}$	1	3	7	9	21			
		$\frac{1}{12}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			
64	$\frac{1}{16}, 2$	1	2	4	8	16	32		
		$\frac{1}{16}, \frac{31}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	<b>2, 2</b>		
65	$\frac{1}{15}, \frac{65}{33}$	1	5	13					
		$\frac{1}{15}, \frac{65}{33}$	$\frac{13}{42}, \frac{13}{7}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$					
68	$\frac{1}{16}, 2$	1	2	4	17	34			
		$\frac{1}{16}, \frac{31}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{58}{33}$	$\frac{8}{33}, \frac{15}{8}$	1, 1	<b>2, 2</b>			
69	$\frac{1}{15}, \frac{3}{2}$	1	3	23					
		$\frac{1}{15}, \frac{3}{2}$	$\frac{11}{56}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$					
70	$\frac{1}{7}, 2$	1	2	5	7	10	14	35	
		$\frac{1}{7}, \frac{13}{7}$	$\frac{1}{7}, \frac{13}{7}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$	$1, \frac{3}{2}$	<b>2, 2</b>	
74	$\frac{1}{18}, 2$	1	2	37					
		$\frac{1}{18}, \frac{1373}{726}$	$\frac{79}{726}, \frac{35}{18}$	<b>2, 2</b>					
75	$\frac{1}{15}, \frac{3}{2}$	1	3	5	15	25			
		$\frac{1}{15}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$	$1, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			
76	$\frac{1}{18}, 2$	1	2	4	19	38			
		$\frac{1}{18}, \frac{35}{18}$	$\frac{1}{9}, \frac{91}{51}$	$\frac{11}{51}, \frac{17}{9}$	1, 1	<b>2, 2</b>			
77	$\frac{1}{18}, \frac{77}{39}$	1	7	11					
		$\frac{1}{18}, \frac{77}{39}$	$\frac{11}{30}, \frac{11}{6}$	$\frac{7}{12}, \frac{7}{4}$					

Abbildung 14: Schranken vollständig egalitärer Gewichte,  $m = 56, \dots, 77$

$m$	$\zeta_{A,\min}, \zeta_{A,\max}$									
80	$\frac{1}{16}, 2$	1	2	4	5	8	10	16	20	40
		$\frac{1}{16}, \frac{31}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{15}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1, \frac{3}{2}$	1, 1	2, <b>2</b>
81	$\frac{1}{18}, \frac{3}{2}$	1	3	9	27					
		$\frac{1}{18}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$					
82	$\frac{1}{20}, 2$	1	2	41						
		$\frac{1}{20}, \frac{892}{469}$	$\frac{46}{469}, \frac{39}{20}$	2, <b>2</b>						
85	$\frac{1}{20}, \frac{85}{43}$	1	5	17						
		$\frac{1}{20}, \frac{85}{43}$	$\frac{17}{72}, \frac{17}{9}$	$\frac{5}{6}, \frac{5}{3}$						
86	$\frac{1}{21}, 2$	1	2	43						
		$\frac{1}{21}, \frac{1081}{567}$	$\frac{53}{567}, \frac{41}{21}$	2, <b>2</b>						
87	$\frac{1}{19}, \frac{3}{2}$	1	3	29						
		$\frac{1}{19}, \frac{3}{2}$	$\frac{7}{45}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$						
88	$\frac{1}{20}, 2$	1	2	4	8	11	22	44		
		$\frac{1}{20}, \frac{39}{20}$	$\frac{1}{10}, \frac{19}{10}$	$\frac{1}{5}, \frac{29}{18}$	$\frac{7}{18}, \frac{9}{5}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	1, 1	2, <b>2</b>		

Abbildung 15: Schranken vollständig egalitärer Gewichte,  $m = 80, \dots, 88$